# الطرق العددية في الهندسة

# *Numerical Methods*
## IN ENGINEERING


تاليف

**Mario G. Salvadori**

**AND**

**Melvin L. Baron**

وترجمة

الاستاذ المساعد الدكتور عبدالاله يونس    الاستاذ المساعد معروف محمد حديد

الاستاذ المساعد رشيد عبدالرزاق الصالحي

جامعة بغداد

# مقدمة المترجمين

قررت وزارة التعليم العالي والبحث العلمي تكليفنا بترجمة كتاب الطرق العددية في الهندسة ( تاليف ماريوسلفادوري ، مليفن بارون ) ليكون كتاباً منهجياً لطلبة الصفوف الثالثة من اقسام الري والبزل في كليات الهندسة .

لقد اعتمدنا في ترجمة الكتاب الموسوم اعلاه على المصطلحات العلمية التي اقرتها المجاميع العلمية العربية واجتهدنا فيما عدا ذلك حيث توخينا الدقة في المعنى العلمي وسلامة اللفظ العربي وذلك بالاعتماد على الالفاظ في القران الكريم والسنة النبوية الشريفة بالاضافة الى معاجم اللغة مثل كتاب الافصاح في اللغة للصعيدي وعلى معجم الوسيط من مطبوعات مجمع اللغة العربية بالقاهرة . اما الرموز العلمية والمعادلات الرياضية والرسوم البيانية فقد تركناها على حالاتها دون ترجمة عملاً بتوصيات التعريب الرسمية المرحلية .

ومما لا ريب فيه ان كل عمل لا يخلو من الاخطاء فقد حاولنا جهد الاستطاعة تقليلها اذ الكمال لله وحده ، لذلك نرجو الصفح من اخواننا التدريسيين املين منهم كل تعاون ونقد بنّاء كما نشكر عمادة كلية الهندسة لجهودها الرائدة في انجاح عملية التعريب وذلك بما اسدته من جهد جهيد في توفير المراجع العلمية والمعاجم الضرورية لانجاح عملية التعريب وترشيدها والله الموفق الهادي الى سواء السبيل .

المترجمون

عبدالاله يونس

معروف محمد العاني

رشيد الصالحي

# مقدمة الطبعة الثانية

ان الاهتمام المتزايد بالطرق العددية ، والقبول الحسن للطبعات الانكليزية والبرتغالية والروسية والصينية من هذا الكتاب ثم ان اعداد طبعات اسبانية ويابانية وايطالية قد اقنعتنا بان تنقيحا في الكتاب قد ان اوانه . وفي هذا التنقيح ابقينا دون تغيير الطابع الابتدائي للكتاب مع توسيع افاقه وتصحيح الاخطاء الثانوية والمطبعية في طبعته الاولى .

اضفنا الى الفصل الاول معالجة لمعادلات الدرجة الرابعة بطريقة براون ، وتوطئة بسيطة لطريقة كريفي للجذور المركبة ، وطريقة لحساب معكوس المصفوفات وطريقة لحل المعادلات الانية غير الخطية .
كما اضيف بند جديد لحل مسائل البرمجة الخطية بطريقة المبسط .

واضيف في الفصل الثاني بند عن قاعدة سترلنك للاستكمال وعن الاستكمال بطريقة لاكرانج كما وسعت الى حد كبير معالجة قواعد التربيع اضافة الى استعمال الفروق المركزية في تدقيق جداول القيم .

وشمل الفصل الثالث طرق المنبيء – المصحح للمعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى والثانية . كما مدت طريقة نوميروف الى معادلات من مرتبة اعلى . كما خصص بند منفصل لتكامل معادلات الفروق لتحسين استيعاب تراكم الخطأ في التكامل خطوة فخطوة .

وبينما لم تمس بنية الفصل الرابع فان الفصل الخامس قد اعيدت كتابته كليا . وتم التأكيد على الفروق الاساسية في طرق تكامل المعادلات الزائدية والمكافئية والناقصية . كما وسع البند عن التكامل المزدوج ليشمل تكاملات ذات حدود متغيرة واشتقت مؤثرات بواسان محسنة في احداثيات ديكارتية ومثلثة كما حلل استقرار الحل العددي للمعادلات المكافئية .

وقد اضيفت مسائل جديدة عن الطرق التي قدمت في الكتاب لاول مرة ، مع اجوبة المسائل المتناوبة ويقارب عدد المسائل الآن الخمسمائة .

اننا نود ان نعبر عن امتناننا الى السيدة الفاماتيوس سلمون والسيد ريموند بارنيس . اللذين حلا بعناية جميع المسائل الجديدة . والى الدكتورت . ل . لو الذي رسم بعض المرتسمات الجديدة .

نيويورك

ماريوجي . سلفادوري
ملفن د . بارون

# مقدمة الطبعة الأولى

لقد نما اهتمام الرياضي التطبيقي والعالم في الطرق العددية الى حد بعيد خلال العقود الاخيرة لاسباب عديدة . ان الحاسبات المنضدية والالكترونية جعلت من الممكن اليوم اجراء حسابات لم يكن من السهل الاقدام عليها قبل بضعة سنوات . ان المسائل التقنية ، والتي لم يكن ممكنا الحصول على حل لها ، قد زادت عددا وتعقيدا وتتطلب حلا فوريا الان بينما اصبح عدد الفنيين القادرين على الحلول التحليلية المعقدة صغيرا جدا . ان الطرق العددية تسمح باستعمال افراد معرفتهم الرياضية محدودة.

ان هذه الظروف توضح شيوع الطرق العددية وتؤشر الحاجة المتزايدة الى افراد بمهارة عددية والى مواضيع في الطرق العددية في الكليات والجامعات .

لقد تطور هذا الكتاب من مجموعة محاضرات أستعملت لتدريس موضوع فصلي في مدرسة الهندسة بجامعة كولومبيا . وكان هذا الموضوع اخر سلسلة من خمسة بدأها المؤلف قبل عدة سنوات لتوسيع الخلفية الرياضية لطلبة الدراسات الاولية والعليا لملىء الفجوة في المعرفة بين الرياضيات النظرية وبين فنون حل المسائل الفيزيائية بالطرق الرياضية .

من الواضح ان استيعاب حقل الطرق العددية الواسع والمتنامي هو من المستحيلات في كتاب بهذا الحجم المتواضع . ان الغرض من هذا الكتاب هو تعريف الطالب والعالم الممارس والمهندس بصورة خاصة ، بهذه الطرق الابتدائية التي غالبا مانحتاجها في حل المسائل الفنية وعليه فان الكتاب موجه الى طلبة الهندسة والفيزياء والكيمياء والرياضيات والى اي شخص يرغب ان يتعلم الطرق العددية ليطبقها في عمله المهني . ويفترض ان للقارىء معرفة بالحسبان ومعرفة سطحية بالمعادلات التفاضلية .

ان فصول الكتاب الخمسة تعالج المواضيع التالية :

1 – حلول المعادلات الجبرية من المرتبات العالية والمعادلات الجبرية الانية الخطية .
2 – النظرية الابتدائية للفروق المحدودة وتطبيقاتها للتفاضل والتكامل والاستكمال والاستيفاء العددي .
3 – حل مسائل القيم الابتدائية العادية .
4 – حل مسائل القيم الحدودية العادية ومسائل القيم المميزة .

5 – حل مسائل تتضمن معادلات تفاضلية جزئية من النوع الحدودي والمميز والمختلط .
عند تقديم مادة هذا الكتاب ، جعلت نظرية الفروق المحدودة الاساس الموحد لكل الطرق العددية حيث ان هذا يجعل معالجة المواضيع المتنوعة اقتصادية ويتجنب التكرار غير الضروري .

ويسمح ، خلال الكتاب ، بطريقة بسيطة لتقييم الاخطاء ، وربما يسمح لاول مرة بالاستعمال المنتظم لطرق استيفاء كفؤة .

ان الطرق العددية المختلفة قدمت او طبقت على مسائل توضيحية بسيطة ماخوذة من فروع الهندسة المتعددة ( الميكانيك ، مقاومة المواد ، الكهرباء ، المرونة ، اللدونة ، جريان الحرارة ، الاهتزازات ، الاستقرار المرن .. الخ ) وذلك لاعطاء اوسع مجال ممكن للتطبيقات ضمن حدود الكتاب ومتطلبات معرفة القارىء . على ان القارىء لايحتاج الى المام بحقل المعرفة المشمول بالمسألة التوضيحية لكي يستوعب الطريقة العددية .

ان اختيار الطرق استند على بساطتها وكفاءتها : فلقد عرف بعضها لاكثر من قرنين ، اما الاخرى فقد طورت في الماضي القريب . ان الاجهزة العددية التي يمكن تطبيق هذه المسائل عليها هي الحاسبة المنضدية عادة والمسطرة الحاسبة في احيان كثيرة . اما الحاسبات الالكترونية الحديثة ، والتي من الواضح ان اغلب هذه الطرق تطبق عليها ، فقد تحاشينا ذكرها حيث ان نظريتها تشكل حقلا جديدا كليا في الرياضيات التطبيقية .

ان المسائل في نهاية كل فصل من نمطين اساسا : تمارين عددية صرفة ثم مسائل تطبيقية . ان العديد من التمارين العددية تمثل مسائل فيزيائية واقعية ويمكن تفسيرها ، مناظرة ، بطرق متنوعة . اما الصياغة الرياضية للمسائل التطبيقية فانها معطاة او يمكن اشتقاقها من نص الكتاب او من المراجع المتعددة في الهوامش .كما اعطيت اجوبة المسائل المتناوبة واجوبة جميع المسائل ذات الاهتمام العام .

لقد قام ملفن د . بارون ، تحت اشرافي بالمهمة الدقيقة والمتعبة في تجميع وحل الاربعمائة سؤال التي يحتويها هذا الكتاب . كما دقق حلول المسائل في النص ورسم مخططات المرتسمات . يسعدني ان اعبر عن امتناني العميق لجهوده الكفؤة .

ان الكتب والاشخاص الذين تعلمت الرياضيات العددية منهم اكثر من ان يحصون

هنا ، غير اني انتهز هذه الفرصة لاعبر عن امتناني للاستاذ موروبيجوني ، مدير المختبر الوطني الايطالي للحسابات ، الذي كان اول من علمني حب الارقام عندما كنت احد طلبته في جامعة روما قبل عشرين سنة .

انني مدين لاصدقائي وزملائي ، الاستاذ ر . جي . شوارتز لمراجعته الثاقبة للمسودة ، والاستاذ ف . هـ . لي للعناية التي اولاها لرسم المرتسمات .كما ان السيدة ارنو موريارتي اعطت برهانا جديدا لبراعتها الفائقة في طبع الكتاب .

نيويورك ماريوجي .سلفادوري.

# الفصل الاول I
# الحلول العملية للمعادلات الجبرية والمتسامية

# The Practical Solution of Algebraic and Transcendental Equations

## 1.1 المقدمة

ان حل المعادلات الجبرية والمعادلات المتسامية ومجموعة المعادلات الآنية الخطية هو أحد الاغراض التي تزاول في كثير من الاحيان في الرياضيات التطبيقية يتطلب عمليات حسابية متعبة .

هناك طرق نظرية لانجاز تلك الحسابات وبالرغم من وجود تلك الطرق . وبعضها غاية في البراعة من الناحية النظرية . لازالت عملية ايجاد الجذور من العمليات المتعبة .

سنعطي طرقا لتعيين الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلات الجبرية ذات الدرجات العالية كما سنعطي طرقا لتعيين الجذور الحقيقية للمعادلات المتسامية . كذلك سنعطي طرق تعيين الجذور الحقيقية للمعادلات الخطية الآنية . ونبحث في استخدام تكييف هذه الطرق باستخدام المساطر الحاسبة والحاسبات الكهربائية حيث تكون النتائج مقربة في حدود خمسة الى عشرة ارقام معنوية . كما انه ستحل بهذه الطرق المعادلات الآنية الخطية في حدود اربعين الى المائة معادلة (ان كفاءة الحاسبات الالكترونية الحديثة تفوق ذلك بكثير) .

ان الاطار العام لهذه الحلول هو تجميع عدة طرق لتقليل الجهد في الحل غير ان للقارىء الحرية في اختيار الطريقة التي تلائمه حيث ان الخيار مسألة تعلم ومفاضلة شخصية

## 1.2 الجذور الحقيقية للمعادلات الجبرية : —

***Real Roots of Algebraic Equations***

المعادلة الجبرية من درجة $n$ تكتب بالشكل التالي :—

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1.2.1)$$

ان لهذه المعادلة $n$ من الجذور بعضها حقيقية مختلفة والبعض الآخر حقيقية مكررة والباقي أزواج من الجذور المركبة المترافقة .

لحل المعادلات الجبرية ذات الدرجات العالية يفضل ان نعين الجذور الحقيقية وبترتيب تنازلي لقيمها المطلقة . ان خير طريقة في تعيين هذه الجذور هي المحاولة والخطأ وعندئذ نقلل من درجة تلك المعادلة .

تستخدم قاعدة «ديكارت» للاشارات في تعيين عدد الجذور الموجبة والسالبة المتوقعة حيث تنص هذه القاعدة على ان عدد الجذور الموجبة يساوي عدد التغيرات في اشارة معاملات المعادلة (أو أقل من ذلك بأي عدد زوجي ) .كما أن عدد الجذور السالبة يساوي عدد الاشارات المتكررة تواليا في المعاملات (أو أقل من ذلك بأي عدد زوجي ) . يجب أن يدخل في هذا الحساب جميع المعاملات ذات القيم الصفرية على أنها ذات اشارة موجبة.

اذا كانت $n$ في المعادلة (1.2.1) عددا فرديا فان لهذه المعادلة جذر حقيقي واحد على الاقل اشارته مخالفة لاشارة المقدار $a_0/a_n$ لتصنع المعادلة لجذورها الحقيقية التي لاتتجاوز قيمتها المطلقة عن الواحد . احسب $f(x)$ لقيم $(x)$ الواقعة في الفترة $-1 \leq x \leq 1$ على مراحل 0.2 أو 0.1 ولجذور المعادلة (1.2.1) التي قيمتها المطلقة أكبر من الواحد ضع .

$$x = \frac{1}{\xi} \qquad \text{(a)}$$

وتحسب المعادلة ادناه للقيم $-1 \leq \xi \leq 1$

$$a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n = 0. \qquad \text{(1.2.1a)}$$

ان الجذر الاكبر للمعادلة (1.2.1) على الاكثر يكون حوالي جذر المعادلة .

$$a_n x + a_{n-1} = 0 \qquad \text{(1.2.2)}$$

أو تكون قيمته المطلقة حوالي اكبر جذري المعادلة

$$a_n x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0. \qquad \text{(1.2.3)}$$

علما بانه عندما يكون اكبر جذر للمعادلة (1.2.1) اعظم كثيرا بالقيمة المطلقة من جميع الجذور الاخرى فان القيم التقريبية اعلاه تكون دقيقة بينما يمكن تقريب اصغر جذر

للمعادلة (1.2.1) بالمثل بجذر المعادلة

$$a_1x + a_0 = 0 \qquad (1.2.4)$$

أو بالجذر الاصغر ( في القيمة المطلقة ) من جذري المعادلة

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \qquad (1.2.5)$$

عندما يكون اصغر جذر للمعادلة (1.2.1) اصغر كثيرا من جميع الجذور الاخرى.
ان الجذور $x_i$ ( حيث $i = 1,2,\ldots,n$ ) للمعادلة (1.2.1) يمكن اختبارها بعلاقات نيوتن التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad (1.2.6a)$$

$$\sum_{(i,j)=1}^{n} x_ix_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \qquad (1.2.6b)$$

$$\sum_{(i,j,k)=1}^{n} x_ix_jx_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \qquad (1.2.6c)$$

.....................

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \qquad (1.2.6d)$$

التي فيها $i \neq j \neq k \neq \ldots.$

لايجاد قيمة متعددة الحدود $f(x)$ وقيم مشتقاتها المتعاقبة عند قيمة معينة مثل $x_0$ نستخدم طريقة التعويض (أو القسمة ) التركيبي بصورة متعاقبة كما هو مبين بالجدول 1.1

**Synthetic Substitution**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_{n-1}$<br>$b_nx_0$ | $a_{n-2}$<br>$b_{n-1}x_0$ | . . .<br>. . . | $a_2$<br>$b_3x_0$ | $a_1$<br>$b_2x_0$ | $a_0$<br>$b_1x_0$ |
| $b_n \equiv a_n$ | $b_{n-1}$<br>$c_nx_0$ | $b_{n-2}$<br>$c_{n-1}x_0$ | . . .<br>. . . | $b_2$<br>$c_3x_0$ | $b_1$<br>$c_2x_0$ | $b_0 \equiv f(x_0)$ |
| $c_n \equiv b_n$ | $c_{n-1}$<br>$d_nx_0$ | $c_{n-2}$<br>$d_{n-1}x_0$ | . . .<br>. . . | $c_2$<br>$d_3x_0$ | $c_1 \equiv \frac{1}{1!}f'(x_0)$ | |
| $d_n \equiv c_n$ | $d_{n-1}$ | $d_{n-2}$ | . . . | $d_2 \equiv \frac{1}{2!}f''(x_0)$ | | |

جدول ( ١-١ ) التعويض التركيبي

يوضع صفر عوضا عن معامل $x$ للقوى المختلفة التي لاتظهر في المعادلة . في المثال التالي سنوضح طريقة لتحديد مواقع الجذور الحقيقية للدالة :-

$$y = f(x) = x^3 - 12.2x^2 + 7.45x + 42 = 0, \qquad \text{(b)}$$

وحسب قاعدة الاشارة لديكارت يمكن ان يكون لها جذران موجبان . أولا جذر موجب لها كما ان لها جذر سالب واحد فقط .

القيمة التقريبية لاكبر جذر معطاة بالمعادلة التالية :

$$x - 12.2 = 0$$

أو بالمعادلة

$$x^2 - 12.2x + 7.45 = 0.$$

المعادلة الاولى تعطي $x_1 = 12.2$ والثانية تعطي

$$x_1 = 6.1 + \sqrt{(6.1)^2 - 7.45} = 11.55,$$

اذا أخذت الاشارة + أمام علامة الجذر التربيعي للحصول على أكبر جذر . وبتطبيق القسمة التركيبية مع تجربة $x_1 = 12$ نحصل على

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −12.2 | 7.45 | 42 |
| 12 | | 12.0 | −2.40 | 60.6 |
| | 1 | − 0.2 | 5.05 | 102.6 |

ان قيمة الباقي يمكن ان تقود القاريء الى الاعتقاد بان الجذر $x_1 = 12$ هو تقريب رديء للجذر $x_1$ ولكن هذا ليس بصحيح ذلك لان قيمة الباقي حساسة لأي تغير في قيمة الجذر عندما يكون الجذر اكبر من الواحد بكثير . وبالفعل فان محاولة ثانية بقيمة $x_2 = 10,$ تعطي

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −12.2 | 7.45 | 42 |
| 10 | | 10.0 | −22.00 | −145.50 |
| | 1 | − 2.2 | −14.55 | −103.50 |

القيمتان $x_1 = 12$ , $x_2 = 10$ تقربان الجذر من الاعلى والاسفل على التوالي وان تقريبا أفضل يمكن الحصول عليه بواسطة الاستكمال الخطي . ان تقاطع المستقيم الواصل بين $P_2(x_2,y_2),\ P_1(x_1,y_1)$

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

مع محور السينات $(y = 0)$ هو

$$x_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} \qquad (1.2.7)$$

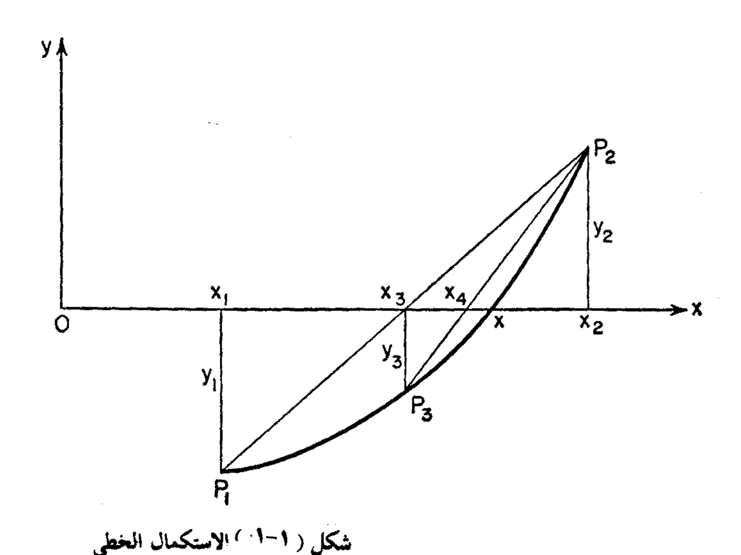
وهو قيمة التقريب المستكمل خطيا $x_3$ ( الشكل 1.1 ). ان المقدار الموجود في الطرف الايمن من المعادلة (1.2.7) يمكن حسابه بعملية واحدة على الحاسبة .

ان تطبيق المعادلة (1.2.7) للتقريب التي يكون فيها $x_1 = 12$, $y_2 = -103$, $x_2 = 10$, $y_1 = 103$ تعطي

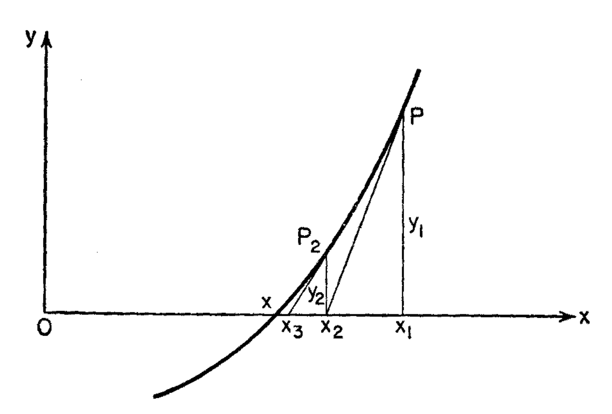
$$x_3 = \frac{12(-103) - 10(103)}{-103 - 103} = 11,$$

وان التقسيم يعطي الباقي $y_3 = -21.25$ . نستطيع الآن ان نجرى الاستكمال الخطي بين 11 و12 فنحصل على $x_4 = 11.17$ مع الباقي الذي قدره 3 55− . واخيرا نخمن القيمة 11.20 التي تعطي

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −12.2 | 7.45 | 42 | |
| 11.20 | | 11.2 | −11.20 | −42.0 | (c) |
| | 1 | − 1.0 | − 3.75 | 0 | |




شكل (١-١) الاستكمال الخطي




شكل (٢-١) طريقة المماس لنيوتن

وتبين أن $x = 11.2$ هو الجذر المطلوب .

كبديل لهذه الطريقة . وبميزة محددة عادة . يمكن استخدام طريقة المماس لنيوتن ( الشكل 1.2 ) لتحسين التقريب الاول للجذر . أن $x_{n+1}$ هي نقطة تقاطع مماس المنحني $y = f(x)$ المرسوم عند النقطة $x = x_n$ مع محور السينات ($y = 0$) وهي معطاة بالمعادلة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.2.8}$$

باستخدام التعويض التركيبي مرتين متعاقبتين نحصل على $f(x_n)$ و $f'(x_n)$ ثم نقيم التقريب التالي $x_{n+1}$ للجذر . باخذ $x_1 = 12$ نحصل . بخطوتين . على

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −12.2 | 7.45 | 42 |
| $x_1 = 12$ | | 12.0 | −2.40 | 61 |
| | 1 | − 0.2 | 5.05 | $103 = f(x_1)$ |
| $x_1 = 12$ | | 12.0 | 142 | |
| | 1 | 11.8 | $147 = f'(x_1)$ | |

$$x_2 = 12 - \frac{103}{147} = 12 - 0.7 = 11.3.$$

باستخدام القيمة الجديدة $x_2 = 11.3$ نحصل على

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −12.2 | 7.45 | 42.0 |
| $x_2 = 11.3$ | | 11.3 | −10.17 | −30.7 |
| | 1 | − 0.9 | − 2.72 | $11.3 = f(x_2)$ |
| $x_2 = 11.3$ | | 11.3 | 117.52 | |
| | 1 | 10.4 | $114.80 = f'(x_2)$ | |

$$x_3 = 11.3 - \frac{11}{115} = 11.3 - 0.1 = 11.2,$$

وهو نفس الجذر الذي حصلنا عليه سابقا

يمكن الوصول الى الجذر باسرع من هذا بقليل من الجهد الاضافي وذلك بان نستخدم طريقة نيوتن من المرتبة الثانية . نفتح $f(x)$ بمسلسلة تيلر حول النقطة $x = x_n$ لغاية ثلاثة حدود بعد وضع : —

$$x_{n+1} - x_n = h, \qquad (1.2.9)$$

نحصل على : —

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)}{2} h^2 + \ldots = 0,$$

أو

$$f(x_n) + h\left[f'(x_n) + \frac{f''(x_n)}{2} h\right] = 0. \qquad \text{(d)}$$

بتقريب قيمة $h$ الموجودة داخل القوس المستطيل بالمعادلة (1.2.8) . أي

$h = -f(x_n)/f'(x_n)$ فان المعادلة (d) تعطي

$$\frac{1}{h} = -\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} + \frac{f''(x_n)/2}{f'(x_n)}. \qquad (1.2.10)$$

وهكذا انطلاقا من القيمة $x_1 = 12$ تعطي المعادلة (b)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-12.20$ | $7.45$ | $42.00$ |
| $x_1 = 12$ | | $12.00$ | $-2.40$ | $60.60$ |
| | 1 | $-0.20$ | $5.05$ | $102.60 = f(x_1)$ |
| $x_1 = 12$ | | $12.00$ | $141.60$ | |
| | 1 | $11.80$ | $146.65 = f'(x_1)$ | |
| $x_1 = 12$ | | $12.00$ | | |
| | 1 | $23.80 = (1/2)f''(x_1)$ | | |

$$\frac{1}{h} = -\frac{146.65}{102.6} + \frac{23.8}{146.65} = -1.27; \qquad h = -0.79;$$

$$x_2 = x_1 + h = 12.00 - 0.79 = 11.21.$$

ان احدى الميزات الرئيسية للقسمة التركيبية هي انها تعطي بصورة مباشرة معاملات المعادلة المختزلة التي جذورها هي الجذور المتبقية للمعادلة الاصلية . ان القسمة التركيبية

للمعادلة (h) على $x - 11.2$ تعطي معادلة الدرجة الثانية التي تظهر معاملاتها في السطر الاخير من النهج (c)

$$x^2 - x - 3.75 = 0,$$

والتي يمكن حلها حيث نحصل على الجذرين الاخرين للمعادلة (b)

$$x = 0.5 \pm \sqrt{0.25 + 3.75} = \begin{cases} +2.5 \\ -1.5. \end{cases}$$

تعميما لنتائج هذا المثال . فانه يمكن الحصول على $(m)$ من الجذور الحقيقية للمعادلة الجبرية جذرا فجذرا باستخدام القسمة التركيبية بصورة متعاقبة على : –

$$(x - x_1), (x - x_2), \ldots, (x - x_m)$$

لأية درجة من الدقة .

يجب أن تمارس عناية خاصة في استخراج الجذور عندما يكون اثنان متساويين تقريبا . أي مشرفين على التكرار . اذا كان جذر المعادلة $f(x) = 0$ بتكرر $k$ من المرات فانه جذر $k - 1$ الاولى من مشتقاتها ايضا . بقسمة المعادلة التالية تركيبا على $x - 3$

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0,$$

نجد ان

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | 3 | 9 |
| 3 | | 3 | −6 | −9 |
| | 1 | −2 | −3 | $0 = f(3)$ |
| 3 | | 3 | 3 | |
| | 1 | 1 | $0 = f'(3)$ | |
| 3 | | 3 | | |
| | 1 | $4 = (1/2)f''(3)$ | | |

وعليه فالجذر $x = 3$ مكرر مرتين .

عندما تكون $f'(x)$ صغيرة جدا بجوار جذر $\bar{x}$ . تصبح المعادلتان (1.2.8) , (1.2.10) حساستين للغاية لتغيرات $x$ . في هذه الحالة يكون عمليا ان نعين اولا الجذر $a$ للمعادلة $f'(x) = 0$ قريبا من الجذر $\bar{x}$ ان نحسب $f''(a)$ وأن نفك $f(x)$ بمسلسلة تيلر حول النقطة $x = a$ لثلاثة حدود فقط .

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(a) + f'(a)(\bar{x} - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(\bar{x} - a)^2 + \ldots \\ &\doteq f(a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(\bar{x} - a)^2. \end{aligned}$$

للحصول على جذور $f(x)$ القريبة من $x = a$ نحل المعادلة من الدرجة الثانية

$$f(a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(\bar{x} - a)^2 = 0,$$

فنحصل على

$$\bar{x}_{1,2} = a \pm \sqrt{\frac{-f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}}. \qquad (1.2.11)$$

مثلا باستخدام القسمة التركيبية على المعادلة التالية مع أخذ $x = 1$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1.0001x + 0.9999 = 0$$

نحصل على

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −1 | −1.0001 | 0.9999 |
| 1 | | 1 | 0 | −1.0001 |
| | 1 | 0 | −1.0001 | −0.0002 = $f(1)$ |
| 1 | | 1 | 1.0000 | |
| | 1 | 1 | −0.0001 = $f'(1)$ | |

بما ان كلا من $f(1)$ و $f'(1)$ صغيرة نحل اولا المعادلة

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.0001 = 0$$

انطلاقا من $x = 1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | −2 | −1.0001 |
| 1 | | 3 | 1.0000 |
| | 3 | 1 | −0.0001 = $f'(1)$ |
| 1 | | 3 | |
| | 3 | 4 = $f''(1)$ | |

ونحصل على الجذر

$$a = 1 - \frac{-0.0001}{4} = 1.000025.$$

بتقييم $f(a)$ و $\frac{1}{2}f''(a)$ بالقسمة التركيبية

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −1. | −1.000100 | 0.999900 |
| 1 000025 | | 1.000025 | 0.000025 | −1.000095 |
| | 1 | 0.000025 | −1.000075 | −0.000195 = $f(a)$ |
| 1.000025 | | 1.000025 | 1.000075 | |
| | 1 | 1.000050 | 0 = $f'(a)$ | |
| 1.000025 | | 1.000025 | | |
| | 1 | 2.000075 = $(1/2)f''(a)$ | | |

وبواسطة المعادلة (1.2.11) نحصل على :-

$$\bar{x}_{1,2} = 1.000025 \pm \sqrt{-\frac{-0.000195}{2.000075}} = \begin{cases} 1.009899 \\ 0.990151. \end{cases}$$

ان الجذور الصحيحة للمعادلة هي 1.01 , 0.99 , 1.00- وعندما تختصر جميع الجذور الحقيقية من المعادلة . يبقى زوج من الجذور الخيالية المترافقة في المعادلة المختزلة الاخيرة.

عندما تكون المعادلة المختزلة هي من الدرجة الثانية يستخرج الجذران الخياليان المترافقان رأساً بدستور.عندما تكون المعادلة المختزلة الباقية من الدرجة الرابعة او السادسة او اعلى من ذلك يكون من الملائم ان نعزل فيها عوامل الدرجة الثانية المسببة لكل زوج من الجذور الخيالية.

## 1.3 حل المعادلات من الدرجة الرابعة بطريقة براون

***Brown's Method for Quartic • quations***

يمكن تحليل معادلة من الدرجة الرابعة الى معاملين من الدرجة الثانية مباشرة بطريقة براون*

لتكن المعادلة من الدرجة الرابعة هي :-

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \qquad (1.3.1)$$

عين المعاملات التالية :-

$$b_1 = a_3a_1 - 4a_0; \qquad b_0 = a_0(4a_2 - a_3^2) - a_1^2 \qquad (1.3.2)$$

ثم احسب جبريا اكبر جذر حقيقي $z_3$ للمعادلة التكعيبية التالية :-

$$z^3 - a_2z^2 + b_1z + b_0 = 0. \qquad (1.3.3)$$

احسب المعاملات

$$c_{1,2} = \frac{a_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 - a_2 + z_3} \qquad (1.3.4)$$

$$d_{i,j} = \frac{z_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z_3}{2}\right)^2 - a_0} \qquad (1.3.5)$$

ثم تحقق أيا منهما $d_i$ ، $d_j$ هو $d_1$ وأيا هو $d_2$ بواسطة العلاقة التالية

$$c_1d_2 + c_2d_1 = a_1. \tag{1.3.6}$$

المعادلتان من الدرجة الثانية واللتان هما عوامل المعادلة (1.3.1) هما

$$x^2 + c_1x + d_1 = 0; \qquad x^2 + c_2x + d_2 = 0. \tag{1.3.7}$$

مثلا لنأخذ المعادلة التالية

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 24x + 16 = 0.$$

نحصل على :-

$$a_3 = -6; \qquad a_2 = 18; \qquad a_1 = -24; \qquad a_0 = 16;$$

$$b_1 = (-6)(-24) - 4(16) = 80;$$

$$b_0 = 16[(4)(18) - (-6)^2] - (-24)^2 = 0;$$

$$z^3 - 18z^2 + 80z = 0;$$

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = 8; \qquad z_3 = 10;$$

$$c_{1,2} = \frac{-6}{2} \pm \sqrt{9 - 18 + 10} = \begin{cases} -2; \\ -4, \end{cases}$$

$$d_{i,j} = \frac{10}{2} \pm \sqrt{25 - 16} = \begin{cases} 8; \\ 2, \end{cases}$$

$$c_1d_2 + c_2d_1 = -2(2) - 4(8) = -36;$$

$$c_1d_2 + c_2d_1 = -2(8) - 4(2) = -24;$$

$$d_2 = 8; \qquad d_1 = 2;$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0; \qquad x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm i; \qquad x_{3,4} = 2(1 \pm i).$$

## 1.4 طريقة كرايفي

### *Graeffe's Method*

لنفرض انه أعطينا المعادلة الجبرية $f(x) = 0$ والتي جذورها

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > \cdots > |x_n|,$$

فالمعادلة

$$F(-x^2) = 0$$

والتي جذورها

$$-x_1^2,\ -x_2^2,\ -x_3^2,\ \ldots,\ -x_n^2$$

تكون عواملها $b_j$ والتي نحصل عليها تبعا لنهج الجدول 1.2

| $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-3}$ | $\ldots$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n^2$ | $a_{n-1}^2$ | $a_{n-2}^2$ | $a_{n-3}^2$ | $\ldots$ | $a_3^2$ | $a_2^2$ | $a_1^2$ | $a_0^2$ |
| | $-2a_na_{n-2}$ | $-2a_{n-1}a_{n-3}$ | $-2a_{n-2}a_{n-4}$ | $\ldots$ | $-2a_4a_2$ | $-2a_3a_1$ | $-2a_2a_0$ | |
| | | $+2a_na_{n-4}$ | $+2a_{n-1}a_{n-5}$ | $\ldots$ | $+2a_5a_1$ | $+2a_4a_0$ | | |
| | | | $-2a_na_{n-6}$ | $\ldots$ | $-2a_6a_0$ | | | |
| | | | | $\ldots$ | | | | |
| $b_n$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | $b_{n-3}$ | $\ldots$ | $b_3$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_0$ |

جدول ( ٢-١ ) نهج كرايفي

بتطبيق نفس الاسلوب على $F(-x^2) = 0$ نحصل على معادلة جذورها $-x_i^4$ وبتكرار هذه العملية عددا كافا من المرات $r$ . للمعادلة الاخيرة جذور $-x_i^{2r}$ بحيث يكون :

$$|x_1^{2r}| \gg |x_2^{2r}| \gg |x_3^{2r}| \gg \ldots \gg |x_n^{2r}|.$$

نرمز لمعاملات هذه المعادلة الاخيرة بـ $c_j$ وندع $2r = m$ و بعلاقات نيوتن الواردة [ بالمعادلة (1.2.6) ]يكون

$$\sum_{i=1}^{n} - x_i^m \approx -x_1^m = -\frac{c_{n-1}}{c_n}$$

$$\sum_{(i,j)=1}^{n} x_i^m x_j^m \approx x_1^m x_2^m = +\frac{c_{n-2}}{c_n}$$

$$\sum_{(i,j,k)=1}^{n} - x_i^m x_j^m x_k^m \approx -x_1^m x_2^m x_3^m = -\frac{c_{n-3}}{c_n}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

وبقسمة الثانية على الاولى ، والثالثة على الثانية وهكذا يكون

$$x_1^m = +\frac{c_{n-1}}{c_n};\quad x_2^m = +\frac{c_{n-2}}{c_{n-1}};\quad x_3^m = +\frac{c_{n-3}}{c_{n-2}};\quad \ldots \qquad (1.4.1)$$

يجب علينا ان نميز ثلاثة حالات وهي :-

(أ) عندما تكون كل الجذور حقيقية . فالضرب المزدوج ( double product ) الوارد في جدول 1.2 يصبح تافها يمكن اهماله مقارنة بقيم $a_j^2$ وتكون جميع $c_j$ ( مربعات كاملة ) فالطريقة تقف عند هذه النقطة وتحسب الجذور من $\pm \sqrt[m]{x_i^m}$ وتحدد العلامات من التعويض بالمعادلة الاصلية.

(ب) عندما لايصبح احد المعاملات $c_j$ مربعا كاملا ولنقل $c_s$ ولكنه يقع بين مربعين كاملين $c_{s+1}, c_{s-1}$ فالنسبة

$$r^{2m} = \frac{c_{s-1}}{c_{s+1}} \tag{1.4.2}$$

تعطي معامل الجذرين المركبين $\alpha_s \pm \beta_s i$ مرفوعين الى أس $(2m)$ أو جذرين حقيقين متساويين $(\beta_s = 0)$ مرفوعين الى أس $(2m)$ للمعادلة الاصلية . ان الاجزاء الحقيقية والاجزاء الخيالية $\alpha_s, \beta_s$ تعين بواسطة علاقات نيوتن عندما تعرف جميع الجذور الحقيقية ومعاملات الجذور المركبة الاخرى كما مبين ادناه .

جـ- عندما يقع $(2k-1)$ غير مربع كامل بين مربعين كاملين $c_{s-2k}, c_s$ فانه يوجد $k$ من ازواج الجذور المركبة متطابقة المعامل $r$ الذي يساوي

$$r^{2km} = \frac{c_{s-2k}}{c_s}. \tag{1.4.3}$$

تعين الجذور المركبة . بعد ازالة الجذور الحقيقية . بعلاقات نيوتن . فمثلا للمعادلة من الدرجة الرابعة بمعرفة المعاملين $r_1, r_2$

$$r_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 \tag{a}$$

$$r_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2, \tag{b}$$

نحصل على

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \tag{c}$$

$$\sum_{(i,j)=1}^{4} x_i x_j = r_1^2 + r_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}. \tag{d}$$

المجاهيل الاربعة $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\beta_1$ , $\beta_2$ هي جذور المعادلات الاربعة (a), (b), (c), (d).

ان المعادلة التالية قد وجدت جذورها الحقيقية والمركبة كما مبين في النهج (f) التي تشير فيها الاسس الى قوى العشرة

$$x^4 - 15x^3 + 138x^2 - 324x + 200 = 0 \qquad (e)$$

| $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^0$ | $-1.5^1$ | $+1.38^2$ | $-3.24^2$ | $+2.00^2$ | 1 |
| $1^0$ | $2.25^2$<br>$-2.76^2$ | $1.9044^4$<br>$-0.9720^4$<br>$0.0400^4$ | $10.4976^4$<br>$-5.5200^4$ | $4.00^4$ | |
| $1^0$ | $-0.51^2$ | $0.9724^4$ | $4.9776^4$ | $4.00^4$ | 2 |
| $1^0$ | $0.2601^4$<br>$-1.9448^4$ | $0.9456^8$<br>$0.0508^8$<br>$0.0008^8$ | $2.4777^9$<br>$-0.7779^9$ | $1.60^9$ | |
| $1^0$ | $-1.6847^4$ | $0.9772^8$ | $1.6997^9$ | $1.60^9$ | 4 |
| $1^0$ | $2.8382^8$<br>$-1.9944^8$ | $0.9944^{16}$<br>$0.0057^{16}$<br>$0.0000^{16}$ | $2.8890^{18}$<br>$-0.3191^{18}$ | $2.56^{18}$ | |
| $1^0$ | $0.8438^8$ | $1.0001^{16}$ | $2.5699^{18}$ | $2.56^{18}$ | 8 |
| $c_4$ | $c_3$ | $c_2$ | $c_1$ | $c_0$ | |

(f)

يلاحظ ان $c_3$ ليست مربعا كاملا ، ولذلك يوجد جذران حقيقيان وجذران مركبان مترافقان والجذور مقربة لرقمين عشريين هي

$$x_4^8 = \frac{c_0}{c_1} = 1.00; \qquad x_4 = \pm 1.00; \qquad x_3^8 = \frac{c_1}{c_2} = 257; \qquad x_3 = \pm 2.00$$

$$(r_{1,2}^2)^8 = \frac{c_2}{c_4} = 1.00 \times 10^{16}; \qquad r_{1,2}^2 = 100.$$

وبتعويض هذه بالمعادلة يظهر ان $x_3 = 2.00,\ x_4 = 1.00,$
وباستخدام علاقة نيوتن نحصل على

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1.00 + 2.00 + 2\alpha = -(-15), \qquad \alpha = 6$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2 = 100; \qquad \beta^2 = 100 - 36 = 64; \qquad \beta = 8$$

$$x_{1,2} = 6 \pm 8i$$

ان المعادلة التالية لها جذور متطابقة المعاملات

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25 = 0 \qquad \text{(g)}$$

وحلها مبين ادناه

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −6 | 18 | −30 | 25 | $m = 1$ |
| 1 | 36<br>−36 | 324<br>−360<br>+50 | 900<br>−900 | 625 | |
| 1 | 0 | 14 | 0 | $6.25^2$ | $m = 2$ |
| 1 | 0<br>$-0.2800^2$ | $0.0196^4$<br>0<br>$0.1250^4$ | 0<br>$-1.7500^4$ | $39.0625^4$ | |
| 1 | $-0.2800^2$ | $0.1446^4$ | $-1.7500^4$ | $39.0625^4$ | $m = 4$ |

منها $c_4 = 1$ , $c_0 = 39.0625^4$ هما مربعان كاملان . و $c_1$, $c_2$, $c_3$ ليست كذلك . يوجد $k = 2$ زوج من الجذور

$$x_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i; \qquad x_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i$$

بمعاملين متساويين بحيث ان

$$r^{2(2\cdot4)} = 39.0625 \times 10^4 \quad \therefore \quad r^2 = 5.$$

بحل المعادلات (a), (b), (c) , (d) من هذا البند نحصل على

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 5; \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 5; \qquad 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = -(-6);$$

$$5 + 5 + 4\alpha_1\alpha_2 = 18,$$

ينتج

$$\alpha_1 = 1; \qquad \alpha_2 = 2; \qquad \beta_1 = 2; \qquad \beta_2 = 1;$$

وعليه

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i; \qquad x_2 = 2 \pm i.*$$

## 1.5 تعيين الجذور المركبة بالمعاودة *Iteration*

يمكن الحصول على العوامل من الدرجة الثانية . وفصلها عن المعادلة . بطريقة القسمة التركيبية على عوامل تجريبية من الدرجة الثانية الى ان نحصل على باق على شكل $s_1x + s_0$ وبحيث يصبح هذا العامل صفرا اوقيمة صغيرة تهمل . ان أول تقريب لعامل الدرجة الثانية العائد للجذر الذي يكون مقياسه modulus غاية في الكبر في المعادلة (1.2.1) هو العامل

$$x^2 + a_{n-1}/a_n x + a_{n-2}/a_n. \qquad (1.5.1)$$

بينما يكون اول تقريب لعامل الدرجة الثانية العائد للجذر الذي مقياسه غاية في الصغر هو :

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}. \qquad (1.5.2)$$

( جدول 1.3 ) يبين القسمة التركيبية على $x^2 + px + q$ (مأخوذة في القوة التنازلية في $x$).

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$
$$= (x^2 + px + q)\left(x^{n-2} + s_{n-1}x^{n-3} + s_{n-2}x^{n-4} + \ldots + s_3x + s_2 + \frac{s_1x + s_0}{x^2 + px + q}\right)$$

| $-q$ | $-p$ | $1$ | → | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-3}$ | $\ldots$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
| | | $-p\cdot 1$ | $-ps_{n-1}$ | $-ps_{n-2}$ | $\ldots$ | $-ps_3$ | $-ps_2$ | |
| | | | $-q\cdot 1$ | $-qs_{n-1}$ | $\ldots$ | $-qs_4$ | $-qs_3$ | $-qs_2$ |
| | $1$ | $s_{n-1}$ | $s_{n-2}$ | $s_{n-3}$ | $\ldots$ | $s_2$ | $s_1$ | $s_0$ |

لاجل اختزال الباقي الخطي $s_1x + s_0$ للصفر ، يمكننا ان نستمر بالمحاولة والخطأ أو بالمعاودة . سنوضح كلا من الطريقتين في حل معادلة الدرجة الرابعة التالية :

$$f(x) = x^4 + 27.4x^3 + 307.44x^2 - 873.7x + 1503.11 = 0. \qquad (a)$$

ان تقريب العامل الاصغر ذي الدرجة الثانية لهذه المعادلة معطى بما يلي

$$x^2 - \frac{873.7}{307.44}x + \frac{1503.11}{307.44} = x^2 - 2.84x + 4.89 \doteq x^2 - 3x + 5.$$

ولحساب الباقي العائد للعامل $x^2 + px + q$ نستعمل اولاً نهج القسمة التركيبية للجدول 1.3 حيث فيه :

$$s_{n-1} = a_{n-1} - p; \quad s_{n-2} = a_{n-2} - ps_{n-1} - q, \quad \ldots.$$

بتقريب العامل $x^2 - 3x + 5$ وتطبيق هذا النهج على المعادلة (a) وتدوير المعاملات تعطي

| $-5$ | $3$ | $1$ | → | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 27.4 | 307 | −874 | 1503 |
| | | 3.0 | 91.2 | 1179.6 | |
| | | | −5.0 | −152.0 | −1966 |
| | 1 | 30.4 | 393.2 | 153.6 | − 463 |

(b)

نلاحظ ان الباقي هو $153.6x - 463$ وان ناتج القسمة هو $x^2 + 30.4x + 393.2$
نحاول الآن القسمة على $x^2 - 2x + 5$ ونحصل على :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −5 | 2 | 1 | → | | |
| | 1 | 27.4 | 307 | −874 | 1503 |
| | | 2.0 | 58.8 | 721.6 | |
| | | | −5.0 | −147.0 | −1804 |
| | 1 | 29.4 | 360.8 | −299.4 | − 301 |

ان $s_1$ الذي هو معامل $x$ في الباقي تغيرت اشارته . وتغيرت قيمة $s_0$ بصورة طفيفة . نحاول الآن القسمة على $x^2 - 3x + 4$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −4 | 3 | 1 | → | | |
| | 1 | 27.4 | 307 | −874 | 1503 |
| | | 3.0 | 91.2 | 1182.6 | |
| | | | −4.0 | −121.6 | −1576.8 |
| | 1 | 30.4 | 394.2 | 187.0 | − 73.8 |

ان المعامل $s_1$ موجب الآن وان قيمته أكبر من القيمة التي حصلنا عليها بالمحاولة الاولى وان الحد الثابت $s_0$ اصغر من سابقه . الآن نقسم على $x^2 - 2.5x + 4$ حاصلين على الباقي التالي $-49.1x - 8.2$ ولكن آخر محاولة تقسيم على $x^2 - 2.6x + 3.9$ تعطينا الباقي التالي $0.2x + 17$ الذي يمكن اعتباره صغيرا ، وناتج قسمة هو $x^2 + 30x + 381.10$ فالجذور الاربعة للمعادلة (a) هي تقريبا

$$x_{1,2} = 1.3 \pm \sqrt{(1.3)^2 - 3.9} = 1.3 \pm 1.49i;$$

$$x_{3,4} = -15 \pm \sqrt{(15)^2 - 381.10} = -15 \pm 12.5i.$$

ان القيم الصحيحة للجذور هي

$$x_{1,2} = 1.3 \pm 1.5i \qquad x_{3,4} = -15 \pm 12.5i.$$

ان طريقة المعاودة لفريد من ( Friedman )(التي هي اسرع التماما ( convergence من طريقة بارستو–لين ( Barstow-Lin )المعروفة اكثر)تغنينا عن الحدس غير أنها قد تلتم ( converge )ببطيء نحو الجواب الصحيح أو قد لاتلتم اطلاقا في الحالات التي تكون فيها معاملات الجذور المركبة مشاركة على التساوي . لذا ينصح ان نشتغل بطريقتي المعاودة والمحاولة والتجربة معا . ان طريقة فريد من تتطلب قسمة الطرف الايسر من المعادلة $f(x)$ بواسطة التجربة على معامل من الدرجة الثانية مرتب حسب القوى التنازلية للمتغير $x$ كما

عمل في الجدول 1.3 وللحصول على عامل افضل نقسم $f(x)$ على ناتج عملية القسمة السابقة وكلاهما مرتب حسب القوى التصاعدية لـ $x$ كما مبين بالجدول 1.4 .ان البواقي في عمليات القسمة لاتحسب حيث انه لاحاجة لها اذا كانت العمليات ملتمة .

الجدول 1.4 القسمة التركيبية على المقدار $1 + p'x + q'x^2$ (بقوى $x$ التصاعدية ).

**Table 1.4**
**Synthetic Division by $1 + p'x + q'x^2$ (in ascending powers of $x$)**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | ← | 1 | $-p'$ | $-q'$ |
| $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | ... | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ | |
| | $-p's'_{n-2}$ | $-p's'_{n-3}$ | ... | $-p's'_2$ | $-p's'_1$ | $-p's'_0$ | | |
| $-q's'_{n-2}$ | $-q's'_{n-3}$ | $-q's'_{n-4}$ | ... | $-q's'_1$ | $-q's'_0$ | | | |
| $s'_n$ | $s'_{n-1}$ | $s'_{n-2}$ | ... | $s'_3$ | $s'_2$ | $s'_1$ | $s'_0 \quad a_0$ | |

جدول ( ٤-١ )

وهكذا انطلاقا بالعامل التجريبي $x^2 - 3x + 5$ وبقسمة $f(x)$ عليه عندما نرتبها في القوى، التنازلية | النهج $(b)$ الصفحة 24 نحصل على الناتج التالي

$$x^2 + 30.4x + 393.2 = 393.2(1 + 0.077x + 0.0025x^2).$$

ان قسمة

$$f(x) = 1503.11 - 873.7x + 307.44x^2 + 27.4x^3 + x^4$$

على

$$1 + 0.077x + 0.0025x^2$$

وتعطي القسمة بالقوى التصاعدية بنهج الجدول 1.4

| | | | |
|---|---|---|---|
| ← | 1 | $-0.077$ | $-0.0025$ |
| 307.44 | $-873.70$ | 1503.11 | |
| 76.19 | $-115.74$ | | |
| $-3.76$ | | | |
| 379.87 | $-989.44$ | 1503.11 | |

أي ناتج القسمة هو

$$1503.11 - 989.44x + 379.87x^2 = 379.87(x^2 - 2.60x + 3.96).$$

باعادة هاتين العمليتين مرة اخرى وتجميعهما في جدول واحد حيث القسمة التي على اليسار مرتبة حسب القوى التنازلية بينما القسمة الموجودة على يمين الجدول مرتبة حسب القوى التصاعدية نحصل على

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −3.96 | 2.6 | 1 | → | ← | 1 | −0.0786 | −0.00262 |
| | 1 | 27.4 | 307.44 | 307.44 | −873.70 | 1503.11 | |
| | | 2.6 | 78.00 | 77.96 | −118.14 | | |
| | | | −3.96 | −3.94 | | | |
| | 1 | 30.0 | 381.48* | 381.46* | −991.84 | 1503.11 | |

أي ناتج قسمة هو :

$$x^2 + 30x + 381.48 = 381.48(1 + 0.0786x + 0.00262x^2)$$

على حسب الترتيب التنازلي .و

$$381.46x^2 - 991.84x + 1503.11 = 381.46(x^2 - 2.60x + 3.94)$$

بالنسبة للقسمة المرتبة حسب القوى التصاعدية . ان تقارب الناتجين المؤشرين بالنجمة يشير الى ان العملية « تلتم » ( converge ) وان المعاملين التقريبين هما

$$x^2 + 30x + 381.48, \quad x^2 - 2.6x + 3.94$$

والتي جذورها هي

$$x_{1,2} = -1.3 \pm 1.5i; \qquad x_{3,4} = -15 \pm 12.5i.$$

وهذه المعاملات صحيحة بالنسبة لعدد الارقام المحسوبة .يمكن حساب العامل الاكبر ذي الدرجة الثانية بطريقة فريدمن مبتدئين بالقسمة المرتبة ترتيبا تصاعديا لقوى $x$ بدلا من الترتيب التنازلي كالآتي

$$f(x) = x^6 - 16x^5 + 128x^4 - 504x^3 + 1156x^2 - 1360x + 800 = 0, \quad \text{(c)}$$

نبدأ بالقسمة على العامل الاكبر مرتبا حسب القوى التصاعدية والذي هو :

$$x^2 - 16x + 128 = 128(1 - 0.125x + 0.008x^2),$$

فيكون ناتج القسمة هو

$$74x^4 - 370x^3 + 993x^2 - \ldots = 74x^2(x^2 - 5x + 13.4) + \ldots.$$

وتستمر العملية بالقسمة تبعا لترتيب قوى المتغير $x$ تنازليا على العامل $x^2 - 5x + 13.4$ ثم بالقسمة البديلة كما هو مبين بالنهج (d)

النهج (d)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −16 | 128 | 128 | −504 | 1156 | −1360 | 800 | |
| −13.4 | 5 | 1 | → | | | ← | 1 | 0.125 | −0.008 |
| | | 5 | −55<br>−13 | −46<br>−8 | 124<br>10 | −158<br>−6 | 100 | | |
| | 1 | −11 | 60 | 74 | −370 | 992 | −1260 | 800 | |
| −17.03 | 5.83 | 1 | → | | | ← | 1 | 0.183 | −0.017 |
| | | 6 | −58<br>−17 | −58<br>−16 | 168<br>21 | −222<br>−14 | 146 | | |
| | 1 | −10 | 53 | 54 | −315 | 920 | −1214 | 800 | |
| −17.35 | 5.85 | 1 | → | | | ← | 1 | 0.189 | −0.019 |
| | | 5.9 | −59.1<br>−17.4 | −58.1<br>−17.3 | 173.4<br>23.0 | −228.5<br>−15.1 | 151.2 | | |
| | 1 | −10.1 | 51.5 | 52.6 | −307.6 | 912.4 | 1208.8 | 800 | |
| −17.64 | 5.92 | 1 | → | | | ← | 1 | 0.196 | −0.019 |
| | | 5.9 | −59.2<br>−17.6 | −59.5<br>−17.2 | 177.4<br>22.9 | −235.8<br>−15.2 | 156.8 | | |
| | 1 | −10.1 | 51.2* | 51.3* | −303.7 | 905.0 | −1203.2 | 800 | |

ان المعاملين التقريبين للمعادلة (c) هما

$$x^2 - 10.1x + 51.2 = 0$$

$$51.3(x^4 - 5.92x^3 + 17.64x^2 - 23.45x + 15.59).$$

ان جذري المعادلة الاولى هما

$$x_{1,2} = +5.05 \pm 5.07i.$$

حيث ان قيمتهما الصحيحتان هي

$$x_{1,2} = 5 \pm 5i.$$

## 1.6 المعادلات المتسامية *Transcendental Equations*

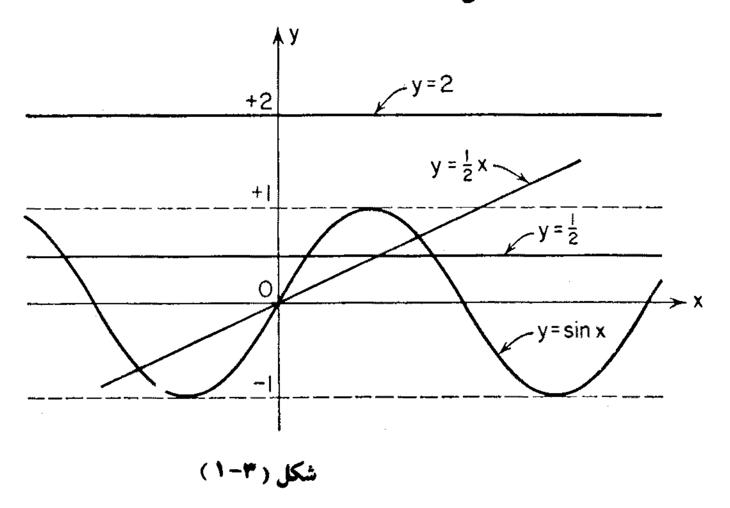
تسمى المعادلات غير الجبرية بالمعادلات المتسامية .قد يكون لمعادلة متسامية عدد منته ( finite ) اوما لانهاية من الجذور الحقيقية وقد لايكون لها أي جذر حقيقي على الاطلاق فمثلا المعادلة

$$\sin x = 2$$

ليس لها أي جذر حقيقي ( الشكل 1.3 ) غير ان لها ما لانهاية له من الجذور الخيالية . والمعادلة

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

لها ما لانهاية له من الجذور الحقيقية ( الشكل 1.3 ) . والمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}x$ لها ثلاثة جذور حقيقية ( شكل 1.3 ).




شكل (٣-١)

حالما يقرب جذر حقيقي لمعادلة متسامية من الاعلى والاسفل . تخطيطيا ( graphically ) او بالمحاولة والخطأ . يمكن استعمال الاستكمال الخطي لتحسين قيمة الجذر باستخدام المعادلة (1.2.7) مثلا المعادلة

$$y = f(x) = e^x - 3x = 0$$

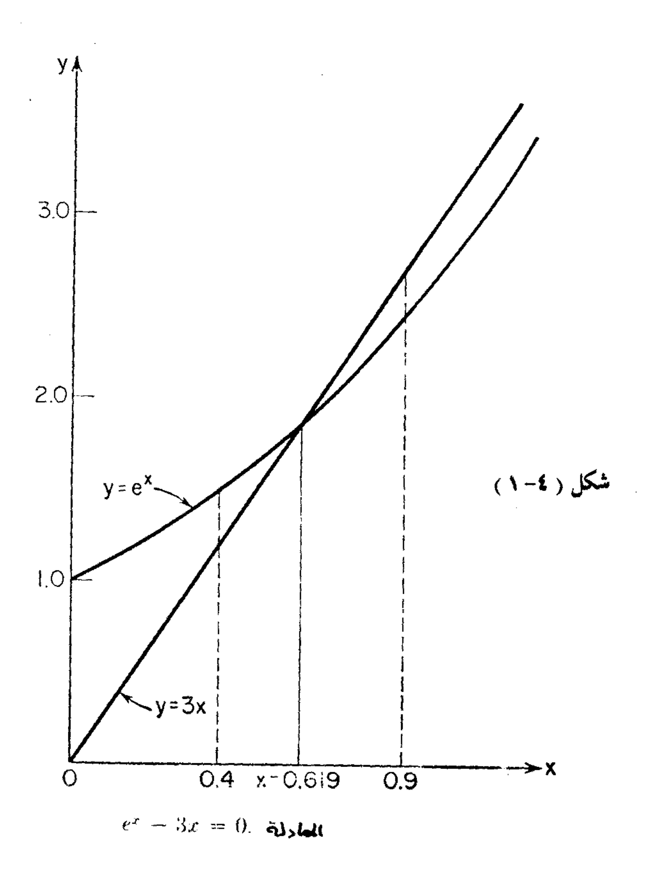
لها جذران حقيقيان احدهما يقع بين 0.4 وبين 0.9 (شكل 1.4 ) عند اخـــذ $x_1 = 0.9$ و $y_1 = -0.24$ وعند اخذ $x_2 = 0.4$ و $y_2 = 0.29$ تعطي المعادلة (1.2.7)

$$x_3 = \frac{0.9(0.29) - 0.4(-0.24)}{0.29 - (-0.24)} = 0.67$$

وباستعمال قيمة $x$ هذه نحصل على $y_3 = -0.06$

وبالاستمرار على نفس الاسلوب نحصل . على التوالي . على

$x_4 = 0.627,\ y_4 = -0.009$ and $x_5 = 0.619,\ y_5 = 0.0001.$




شكل (٤-١)

المعادلة $e^x - 3x = 0.$

من ناحية اخرى لو استخدمنا طريقة المماس لنيوتن [ المعادلة (1.2.8) ] يكون لدينا

$$f(x) = e^x - 3x \qquad f'(x) = e^x - 3; \qquad \tfrac{1}{2}f''(x) = \tfrac{1}{2}e^x$$

انطلاقا عند النقطة $x = 0.4$

| $x$ | 0.4 | 0.594 | 0.618 | 0.619 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$<br>$f'(x)$<br>$h$ | 0.292<br>−1.508<br>0.194 | 0.029<br>−1.189<br>0.024 | 0.001<br>−1.145<br>0.001 | 0.0001 |

وبطريقة نيوتن ذات المرتبة الثانية [ معادلة (1.2.10) ] نحصل على

| $x$ | 0.4 | 0.614 | 0.619 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.292 | 0.006 | 0.0001 |
| $f'(x)$ | −1.508 | −1.152 | |
| $\frac{1}{2}f''(x)$ | 0.746 | 0.924 | |
| $1/h$ | 4.669 | 191.2 | |
| $h$ | 0.214 | 0.005 | |

هناك طريقة اخرى تعين بها الجذور الحقيقية للمعادلات المتسامية . والتي لاتلتم في جميع الحالات . وهي ان نفك الدوال التي تظهر بالمعادلة بالمسلسلات الاسية ( عندما يكون ذلك ممكنا ) ثم نحل المعادلات الجبرية التي تنتج من قطع المتسلسلات بعد حدين او ثلاث أو ... $n$ من الحدود . ان مفكوك الطرف الايمن للمعادلة (a) مثلا يعطي

$$f(x) = e^x - 3x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right) - 3x$$
$$= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots,$$

وتكون المعادلات الجبرية المتتالية مع جذورها الصغرى هي

$$1 - 2x = 0 \qquad x_1 = 0.5$$
$$x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad x_1 = 0.586$$
$$x^3 + 3x^2 - 12x + 6 = 0 \qquad x_1 = 0.613$$
$$x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 48x + 24 = 0 \qquad x_1 = 0.618.$$

وقد تصبح هذه الطريقة ذات ميزة عندما يكون تعيين بضعة الجذور الاولى لمعادلة متسامية ضروريا.

لايجاد الجذور المركبة للمعادلة المتسامية $f(z) = 0$ نعوض عن المجهول بالمقدار $z = x + iy$ وندع كلا من جزئي $f(z)$ الحقيقي والخيالي مساويا الصفر. ان هذا يقود الى حل معادلتين آنيتين غير خطيتين والذي يمكن انجازه بطريقة البند ( 1.17 ) .

مثلا . نحصل على الجذور المركبة للمعادلة (a) بتغيير $x$ الى $z$

$$f(z) = e^z - 3z = e^{x+iy} - 3(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$$
$$-3x - 3yi = 0$$

ثم حل المعادلتين غير الخطيتين التاليتين

$$e^x \cos y - 3x = 0; \qquad e^x \sin y - 3y = 0. \qquad \text{(b)}$$

## 1.7 حل المعادلات الخطية الآنية بالمحددات

ان حل منظومات المعادلات الآنية الخطية يعتبر من بين أهم قضايا الرياضيات العددية واكثرها شيوعا . وقد تم عرض عدد كبير من الطرق لانجاز هذه المهمة ، كما ان عددا من الحاسبات الخاصة من النوع الرقمي [ ( digital ) أوالمماثل ( analogue ) ] متوفر حاليا لحل مثل هذه المعادلات.

ان الجذور $x_j \ (j = 1,2,\ldots,n)$ العائدة لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned} \qquad (1.7.1)$$

تعطى اصوليا بنسبة المحددين (1.7.2)

$$x_j = \frac{D_j}{D},$$

حيث ان

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.7.3)$$

هو محدد المعاملات و

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & c_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & c_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & c_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.7.4)$$

ان طريقة التكثيف المرتكزى [ طريقة جيو Chio ] . هي من اكفأ الطرق لتقييم المحددات الرقمية ( او الحرفية) طبقا للنهج التالي والذي يحسب كل عنصر بمحدد من المرتبة الثانية .

$$D = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \qquad (1.7.5)$$

مثلا

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{4-2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1^{3-2}} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot 12 = 3.$$

ان الحل بواسطة المحددات يصبح شاقا عندما تكون ($n$) اكبر من 4 او 5 ولذلك فقد ابتكرت عدة طرق اخرى للحصول على نفس النتائج بكفاءة اكبر من طريقة الحل بالمحددات .

ان الطرق الاربعة التالية قد كيفت لاستخدام الحاسبات او المساطر الحاسبة ولها الخواص التالية :-

1- نهج كاوس ( *Gauss* ) هو اسلوب عام لحذف المجهول بصورة نظامية ومكيف لاستخدام المسطرة وسهل التذكر .

2- نهج كولسكي ( *Cholesky* ) هو اسلوب عام لحذف المجاهيل بصورة نظامية حسن التكييف للحاسبات الآلية .

3- طريقة كاوس - سايدل للمعاودة ( *Gauss-Seidel* ) وهو نهج تسريب المتعاقب ينطبق على انماط محددة من المعادلات وحسن التكييف للحاسبات الآلية .

4- طريقة الارخاء ( *Relaxation* method ) وهي تتبع التقريب المتعاقب وقابلة التطبيق على انواع متعددة من المعادلات ومكيفة لاستخدام المساطر الحاسبة .

ان كل هذه الطرق ستوضح بامثلة في البند التالي

## 1.8 نهج كاوس Gauss's Scheme

ان نهج كاوس للحذف مطبق في الجدول ( 1.5 ) على النموذج التالي

| Eqs. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 2 | 2 | 4 | −2 | 10 |
| II | 1 | 3 | 2 | 1 | 17 |
| III | 3 | 1 | 3 | 1 | 18 |
| IV | 1 | 3 | 4 | 2 | 27 |

(1.8.1)

والذي تقرأ المعادلة (I) ، مثلا بالشكل التالي

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 10.^*$$

الجدول 1.5 هو جدول ذاتي التفسير من كل الوجوه . عدا الارقام $r$ والعمود $S$ الارقام $r$ هي نسب المعاملات وتستخرج كما يلي . ان $r_2$ هو نسبة معامل $x_1$ ، 1 المحاط بالدائرة في السطر الثاني الى معامل $x_1$ ، 2 المحاط بالمربع في السطر الاول بينما $r_3$ هو نسبة معامل $x_1$ ، 3 المحاط بالدائرة في السطر الخامس الى معامل $x_1$ ، 2 في السطر الاول وان $r_3$ هو نسبة معامل $x_2$ ، 2− المطوق بالدائرة في السطر السابع الى معامل $x_2$ ، 2 المحاط بمربع في السطر الرابع وهكذا .

العمود $S$ يستعمل للتحقيق وهو يمثل مجموع جميع المعاملات مع الحد الثابت في كل سطر ويعامل كأي رقم اخر في نفس السطر . ان الرقم $S$ في سطر ما المقتنى بالعمليات المؤشرة في عمود الشرح . يجب ان يطابق مجموع الحدود في ذلك السطر . ان استعمال عمود التحقيق $S$ يصبح ضروريا جدا متى مازاد عدد المجاهيل على الاربعة . الجذور نحصل عليها من المعادلات الواقعة في السطور التي تسلسلها $n^2$ أي (1,4,9,16) والتي تحتوي على 1 ,2 ,3 ,4 من المجاهيل على التوالي وبالتعويض التراجعي ابتداء من آخر معادلة تكون المعادلات والجذور

(*) عادة يوضع الثابت (ب) على يمين المعادلة.

| | | |
|---|---|---|
| Row 16: | $5x_4 = 20$ | $x_4 = 4$ |
| Row 9: | $-3x_3 + 6x_4 = 15$ | $x_3 = 3$ |
| Row 4: | $2x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 12$ | $x_2 = 2$ |
| Row 1: | $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 10$ | $x_1 = 1$ |

ان استخدام نهج كاوس في حل عدة منظومات من المعادلات لها نفس معاملات المجاهيل ولكنها تختلف بقيم الحدود الثابتة لها ، $(c)$، يتطلب حساب العمودين $(c)$ ، $(S)$ فقط لكل مجموعة حيث ان الاعمدة الاخرى جميعها لاتتغير . انه من الممكن استخدام هذه الخاصية المهمة في نهج كاوس لحساب ارقام اضافية في الجذور بجهد اضافي طفيف. ولهذا الغرض يحسب الطرف الايسر $(c')$ للمعادلات بالجذور المقتناة ، ثم يحسب الفرق $(e)$ بين الثابتين $(c)$ $(c')$ . وباستعمال هذه الفروق $(e)$ كثوابت تحسب قيم جديدة للمجاهيل $x'$ والتي باضافتها الى القيم السابقة تعطي قيما محسنة $x + x'$ لجذور المنظومة الاصلية*

* يمكن انجاز هذه العمليات بالطريقة المبينة في القسم الاسفل من جدول ٢-٤

**Table 1.5**
**Gauss's Scheme**

| Rows | $r$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $c$ | $S$ | Explanations |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | | 2 | 2 | 4 | −2 | 10 | 16 | (I) |
| 2 | $r_2 = 1/2$ | 1 | 3 | 2 | 1 | 17 | 24 | (II) |
| 3 | | −1 | −1 | −2 | 1 | −5 | −8 | $-r_2 \times (1)$ |
| (4) | | 0 | 2 | 0 | 2 | 12 | 16 | (2) + (3) |
| 5 | $r_3 = 3/2$ | 3 | 1 | 3 | 1 | 18 | 26 | (III) |
| 6 | | −3 | −3 | −6 | 3 | −15 | −24 | $-r_3 \times (1)$ |
| 7 | $r_3' = -2/2$ | 0 | −2 | −3 | 4 | 3 | 2 | (5) + (6) |
| 8 | | | 2 | 0 | 2 | 12 | 16 | $-r_3' \times (4)$ |
| (9) | | | 0 | −3 | 6 | 15 | 18 | (7) + (8) |
| 10 | $r_4 = 1/2$ | 1 | 3 | 4 | 2 | 27 | 37 | (IV) |
| 11 | | −1 | −1 | −2 | 1 | −5 | −8 | $-r_4 \times (1)$ |
| 12 | $r_4' = 2/2$ | 0 | 2 | 2 | 3 | 22 | 29 | (10) + (11) |
| 13 | | | −2 | 0 | −2 | −12 | −16 | $-r_4' \times (4)$ |
| 14 | $r_4'' = 2/-3$ | | 0 | 2 | 1 | 10 | 13 | (12) + (13) |
| 15 | | | | −2 | 4 | 10 | 12 | $-r_4'' \times (9)$ |
| (16) | | | | 0 | 5 | 20 | 25 | (14) + (15) |
| 17 | Const. $c_i$ | 10 | 12 | 15 | 20 | | | |
| 18 | $-x_4 a_{i4}$ | 8 | −8 | −24 | 20 $x_4 = 20/5 = 4$ | | | |
| 19 | $-x_3 a_{i3}$ | −12 | 0 | −9 $x_3 = (-9)/(-3) = 3$ | | | | |
| 20 | $-x_2 a_{i2}$ | −4 | 4 $x_2 = 4/2 = 2$ | | | | | |
| 21 | $(i = 1,4,9,16)$ | 2 $x_1 = 2/2 = 1$ | | | | | | |

جدول ( ۵ - ۱ ) نهج كاوس

مثلا تصور اننا استخرجنا جذور منظومة المعادلات (a) لرقمين ذي دلالة وكانت

$x_3 = 1.3, \ x_2 = 1.50, \ x_1 = 1.60$

| Eqs. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 1 | 6.00 |
| II | 2 | 1 | 1 | 6.11 |
| III | 1 | 1 | 2 | 5.73 |

(a)

فاننا نحسب

$$e_1 = 6.00 - (1.60 + 2 \cdot 1.50 + 1.30) = 0.10$$
$$e_2 = 6.11 - (2 \cdot 1.60 + 1.50 + 1.30) = 0.11$$
$$e_3 = 5.73 - (1.60 + 1.50 + 2 \cdot 1.30) = 0.03$$

بعد ذلك نحل المنظومة التي تدعي بمعادلات الاخطاء

| Eqs. | $x'_1$ | $x'_2$ | $x'_3$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 1 | 0.10 |
| II | 2 | 1 | 1 | 0.11 |
| III | 1 | 1 | 2 | 0.03 |

فنحصل على $x'_3 = -0.03, x'_2 = 0.04, x'_1 = 0.05$ فالجذور المحسنة هي

$$x_1 = 1.60 + 0.05 = 1.65$$
$$x_2 = 1.50 + 0.04 = 1.54$$
$$x_3 = 1.30 - 0.03 = 1.27$$

وهي في هذه الحالة . الجذور الصحيحه للمعادلة الاصلية (a) .

## 1.9 المصفوفات *Matrices*

صفيفة array مستطيلة من الارقام ذات $m$ من الاسطر و $n$ من الاعمدة تدعى مصفوفة m في n وعادة يرمز لها بحرف كبير فالصفيفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة $2 \times 3$ -العنصر الواقع في السطر $i$ والعمود $j$ يرمز له بشكل $a_{ij}$ المصفوفة $n \times n$
تدعى بمصفوفة مربعة والعنصر $a_{ii}$ يكون القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة . ان محددة عناصر
مصفوفة مربعة $A$ تدعى محددة المصفوفة $A$ ويشار لها بالرمز $|A|$ المصفوفة المربعة التي تكون
جميع عناصرها الواقعة أسفل قطرها الرئيسي اصفارا تدعى المصفوفة المثلثية العليا بينما
المصفوفة التي تكون جميع عناصرها الواقعة فوق قطرها الرئيسي اصفارا وتدعى المصفوفة
المثلثية السفلى ويشار لها بالحرف $L$ . المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها الواقعة على قطرها
الرئيسي هي واحد بينما عناصرها الواقعة اسفل قطرها اصفارا تدعى بوحدة المصفوفات
المثلثية العليا ويشار لها بالحرف $T$ . المصفوفة $m$ في $1$ تدعى عمودا . المصفوفة التي جميع
عناصرها اصفارا تدعى صفر المصفوفات . المصفوفة المربعة التي عناصرها واحد على قطرها
الرئيسي بينما بقية عناصرها الاخرى اصفارا تدعى بوحدة المصفوفات ويشار لها بالحرف $I$ .
تتساوى المصفوفتان $A, B$ في حالة وفي حالة فقط كون أي عنصر $a_{ij}$ في الاولى يساوي نظيره
$b_{ij}$ من الثانية والمصفوفة $C$ تسمى مجموع ($sum$) المصفوفتين $A, B$ اذا كان $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
المصفوفة $C$ ( $product$ ) حاصل ضرب $AB$ (نتيجة ضرب $B$ المسبق بـ $A$) اذا كان

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad (1.9.1)$$

حيث $n$ عدد اعمدة $A$ وهي عدد سطور $B$ . ان حاصل الضرب $AB$ نحصل عليه بضرب
السطور في الاعمدة وعلى العموم يختلف عن حاصل الضرب $BA$ (اذا كان له وجود) . ان
حاصل الضرب $AB$ له وجود في حالة كون عدد اعمدة $A$ مساوٍ لعدد السطور $B$ فقط فمثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$AB$ يساوي

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \\ (1 \cdot 2 + 3 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 3 \cdot 2) & (1 \cdot 1 + 3 \cdot 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} = C. \end{aligned}$$

محددة حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين هو حاصل ضرب محددتي المصفوفتين مثلا

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = AB = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$|A| = 3; \quad |B| = -5,$$

وان محددة $C$ تساوي

$$|C| = |A|\,|B| = (3)(-5) = -15.^*$$

بتذكر قاعدة ضرب المصفوفات تستطيع ان ترى ان منظومة ثلاثة معادلات آنية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

يمكن كتابتها على شكل مصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

أو بالشكل المبسط التالي

$$AX = C.$$

المصفوفة $A = [a_{ij}]$ تسمى بمصفوفة المنظومة . والعمود $X = [x_i]$ والعمود $C = [c_i]$ هما عمودي المجاهيل والثوابت على التوالي .

ان الخطوة الاساسية في اية طريقة لحل المعادلات الآنية بطريقة الحذف تتضمن اختزال المنظومة وتحويلها الى الوحدة المثلثية العليا .

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 1 & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix},$$

أو

$$TX = K,$$

(*) انظر Aitken اواي كتاب اخرفي الجبرالعالي للالمام بصورة كافية في جبرالمصفوفات

حيث ان المنظومة

$$\begin{aligned} x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 &= k_1 \\ x_2 + t_{23}x_3 &= k_2 \\ x_3 &= k_3 \end{aligned}$$

من الممكن حلها بالتعويض الرجعي ( من الاخيرة الى الاولى ).

### 1.10 نهج كولسكي[*] *Cholesky's Scheme*

ان طريقة كولسكي تصبح ملائمة عند استعمال المصفوفة حيث ان أساسها هو تعيين مصفوفة مساعدة $L$ من نوع المصفوفات المثلثية السفلى قادرة على تحويل المنظومة الاصلية $AX - C = 0$ الى وحدة المصفوفات المثلثية $TX - K = 0$

لهذا الغرض نفرض ان منظومة المعادلات المراد حلها قد اختزلت الى صيغة وحدة المصفوفات المثلثية $TX - K = 0$ وان ضربها بالمصفوفة المثلثية السفلى $L$ سيعيدها الى صيغتها الاصلية

$$L(TX - K) = AX - C = 0.$$

وهذا يتضمن معادلتين بالمصفوفات

$$LT = A; \qquad LK = C.$$

ان قاعدة ضرب المصفوفات تمكننا من تعيين $K, T, L$ بطريقة سهلة (*) .
في الواقع عند كتابة هذه المعادلات بشكل صريح واضافة العمود $C$ الى $A$ والعمود $K$ الى $T$ للاقتصاد ، تصبح هذه المعادلات لمنظومة ذات ثلاث معادلات

$$\overset{[A]\qquad\qquad [C]}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{bmatrix}} = \overset{[L]}{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}} \overset{[T]\qquad\quad [K]}{\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & k_1 \\ 0 & 1 & t_{23} & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 \end{bmatrix}},$$

(**) استخدم كولسكي هذه الطريقة في فرنسا قبل عام ١٩١٦ فيما يخص النظم المتماثلة ،كما طرحت بصيغة المصفوفة في بولندا من قبل باناجيفكس عام ١٩٣٨ ، واعيد اكتشافها وتكييفها للحسابات الممكنة في الولايات المتحدة من قبل كراوت عام ١٩٤١ ،ودرست مرة اخرى في انكلترا من قبل تورنغ عام ١٩٤٨ وتزورمول في المانيا عام ١٩٤٩ .

(*) الطريقة استخدمت للحصول على $L, T, K$ تبين ان كلا من هذه المصفوفات الثلاثة هي وحيدة القيمة، حالما نعرف $C, A$

ومن هذه يمكن الحصول على معادلات عناصر كل من $K, T, L$

$$a_{i1} = l_{i1} \times 1 + l_{i2} \times 0 + l_{i3} \times 0 = l_{i1}, \qquad \text{(a)}$$

أي أن العمود الاول من $L$ مطابق للعمود الاول من $A$

$$a_{1j} = l_{11}t_{1j} + 0 \times t_{2j} + 0 \times t_{3j} = l_{11}t_{1j} = a_{11}t_{1j}, \qquad \text{(b)}$$

وان السطر الاول من $T$ يساوي السطر الاول من $A$ مقسوما على $a_{11}$

$$\left.\begin{aligned} a_{22} &= l_{21}t_{12} + l_{22} \times 1 & \therefore \quad l_{22} &= a_{22} - l_{21}t_{12} \\ a_{23} &= l_{21}t_{13} + l_{22}t_{23} & \therefore \quad t_{23} &= (a_{23} - l_{21}t_{13})/l_{22} \\ a_{32} &= l_{31}t_{12} + l_{32} \times 1 & \therefore \quad l_{32} &= a_{32} - l_{31}t_{12} \\ c_2 &= l_{21}k_1 + l_{22}k_2 & \therefore \quad k_2 &= (c_2 - l_{21}k_1)/l_{22} \end{aligned}\right\} \text{(c)}$$

وهكذا، ان عناصر $L$ و $T$ و $K$ تستخرج على التعاقب بهذا الاسلوب بدلالة العناصر السابقة لها متدرجين بصورة افقية من $l_{22}$ .
المعادلات العامة لانجاز الحساب هي

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}t_{rj}; \qquad l_{i1} = a_{i1} \qquad (1.10.1)$$

$$t_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}[a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir}t_{rj}]; \qquad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (1.10.2)$$

للاختصار وضع $a_{i,n+1} = c_i$ و $t_{i,n+1} = k_i$ كما ان $(n+1)$ تشير الى العمود الاخير في المصفوفتين الموسعتين ( augmented matrices ) $A + C$ و $T + K$ يظهر لنا من المعادلتين ( 1.10.1 ) و ( 1.10.2 ) انه اذا كان المصفوفة $A$ متماثلة ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) فان

$$l_{ij} = t_{ji} \times l_{jj} \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n-1;\ i \neq j), \qquad (1.10.3)$$

وعليه فان عناصر $L$ الواقعة اسفل القطر الرئيسي تقتنى كخطوة وسطية عند حساب العناصر

يمكن انجاز العمليات في المعادلتين ( 1.10.1 ) و ( 1.10.2 ) باستخدام الآلة الحاسبة دون كتابة اي خطوات وسطية . اي ان كل عنصر من $l_{ij}$ و $t_{ij}$ يقتنى في عملية واحدة وهذا مايجعل طريقة كولسكي من أبسط واسرع الطرق المعروفة من طرق الحذف. اذا ماحسبنا عمليات الضرب والقسمة وتسجيل الارقام فقط . فان طريقة كاوس للحذف

مطبقة على منظومة $n$ من المعادلات تتطلب ( عدد من رتبة $n^2$ ) + $\frac{1}{3}n^3$ من العمليات بينما تتطلب طريقة كولسكي ( عدد من رتبة $n$ ) + $n^2$ من العمليات وكمثال ذلك عندما $n = 10$ فان طريقة كاوس تحتاج الى $433 = 10^2 + (10^3/3)$عملية مقاونة بطريقة كولسكي التي تحتاج الى$10 + 10^2 = 110$ عملية فقط .

ان الوقت المستغرق في حل منظومة تتألف من $n$ من المعادلات بطريقة كولسكي على حاسبة منضدية هو من مرتبة $0.001n^4$ ساعة وعليه يمكن حل منظومة عشر معادلات بسهولة في عشر ساعات تقريبا.

ان عدد الارقام الضائعة في الحسابات يختلف من منظومة الى اخرى غير انه . احصائيا يكون من رتبة $0.3n$ وعليه يجب حمل ثلاثة ارقام اضافية ذات دلالة . في منظومة العشر معادلات . اكثر مما يتطلبه الجذر.

في الجدول 1.6 حلت منظومة المعادلات ( 1.8.1 ) بطريقة كولسكي كالتالي اكتب عمود $L$ الاول الذي يساوي العمود الاول في المصفوفة $A$ [2,1,3,1] والسطر الاول في المصفوفة الموسعة $T + K$ و والذي يساوي السطر الاول في المصفوفة الموسعة $A + C$ مقسوما على2 $= a_{11}$ ولذا يساوي [ 1,1,2,−1,5 ] بعد ذلك احسب $l_{22}$ وذلك بان يساوي $a_{22}$ الى حاصل ضرب السطر في العمود للسطر الثاني في $L$ بالعمود الثاني في $T$

$$3 = 1 \cdot 1 + l_{22} \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \quad \therefore \quad l_{22} = 2,$$

| | | $A$ | | | $C$ | | $L$ | | | | $T$ | | | | $K$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $c$ | $S$ | | | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $k$ | $S$ |
| 1 | 2 | 2 | 4 | −2 | 10 | 16 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | −1 | 5 | 8 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 17 | 24 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 | 8 |
| 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 18 | 26 | 3 | −2 | −3 | 0 | 0 | 0 | 1 | −2 | −5 | −6 |
| 4 | 1 | 3 | 4 | 2 | 27 | 37 | 1 | 2 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 5 |
| 5 | 7 | 9 | 13 | 2 | 72 | $S$ | 7 | 2 | −1 | 5 | | | | | | |

جدول ( ٦-١ )

او انك تستطيع ان تجدها مباشرة باستعمال المعادلة ( 1.10.1 ) . بعد ذلك احسب $t_{23}$ ، العنصر الاول المجهول في السطر الثاني من المصفوفة $T$ بمساواة $a_{23}$ الى حاصل ضرب السطر الثاني من $L$ بالعمود الثالث من $T$

$$a_{23} = 2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot t_{23} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \quad \therefore \quad t_{23} = 0,$$

ومباشرة باستخدام المعادلة ( 1.10.2 ) . احسب $t_{24}$ بنفس الطريقة

$$a_{24} = 1 = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot t_{24} + ( \cdot t_{34} + 0 \cdot t_{44} \quad \therefore \quad t_{24} = 1,$$

بعد ذلك احسب $t_{25} = k_2$ كما يلي

$$a_{25} = c_2 = 17 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot t_{25} + 0 \cdot t_{35} + 0 \cdot t_{45} \quad \therefore \quad t_{25} = k_2 = 6.$$

بنفس الاسلوب تحسب عناصر $L$ وعناصر $T$ الاخرى . ان اعمدة التحقيق $S$ يمكن اضافتها الى المصفوفتين الموسعتين $A + C$, $T + K$ كما يمكن اضافة اسطر تحقيق $S'$ في المصفوفتين $A$ و $L$. تعامل هذه الاعمدة ( والاسطر) كنظائرها في المصفوفات ويتحتم تطابقها مع مجموع العناصر في نفس العمود ( او السطر ) .

يمكن وضع حقول اضافية $C$ و$K$ عند حل مجموعة من المعادلات لها نفس معاملات المصفوفة ولكنها تختلف في اعمدة الثوابت.

عند هضم طريقة الحل يمكن وضع المصفوفتين $L$ و$T$ بمصفوفة مربعة واحدة وذلك ان عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $T$ كل منها واحد وهذه تعطي نهج 1.7 المركز.

يمكن الحصول على قيم $x_i$ من النظام المثلثي $TX = K$ وباستخدام التعويض الرجعي فيه ( من الاخير الى الاول ) كالاتي

**Table 1.7**
**Cholesky's Condensed Scheme**

| | A | | | | C | | L and T | | | | K | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $c$ | $S$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $k$ | $S$ |
| 1 | 2 | 2 | 4 | −2 | 10 | 16 | 2 | 1 | 2 | −1 | 5 | 8 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 17 | 24 | 1 | 2 | 0 | 1 | 6 | 8 |
| 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 18 | 26 | 3 | −2 | −3 | −2 | −5 | −6 |
| 4 | 1 | 3 | 4 | 2 | 27 | 37 | 1 | 2 | 2 | 5 | 4 | 5 |
| 5 | 7 | 9 | 13 | 2 | 72 | $S'$ | 7 | 2 | −1 | 5 | | |

**جدول (٧-١)** نهج كولسكي المركز

| | | | |
|---|---|---|---|
| Row 4 | $x_4 = 4$ | | |
| Row 3 | $x_3 - 2 \cdot 4 = -5$ | $\therefore$ | $x_3 = 3$ |
| Row 2 | $x_2 + 0x_3 + x_4 = 6$ | $\therefore$ | $x_2 = 2$ |
| Row 1 | $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5$ | $\therefore$ | $x_1 = 1.$ |

**Table 1.8**
**Cholesky's Scheme for Symmetrical Matrices**

| | A | | | C | S | L | | | T | | | K | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 2 | 4 | 8 | 16 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 5 | 10 | 2 | −1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 4 | 2 | 3 | 9 | 18 | 4 | −2 | −1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 8 | 5 | 9 | 22 | $S'$ | 8 | −3 | −1 | | | | | |

**جدول (٨-١)** نهج كولسكي للمصفوفات المماثلة

(1) $l_{22} = 1 - 2 = -1;$

(2) $l_{23} = (2 - 2 \cdot 2)/(-1) = -2/-1 = l_{32}/-1 = 2;$

(3) $l_{24} = (5 - 2 \cdot 4)/(-1) = l_{42}/-1 = 3;$

(3a) $l_{25} = (10 - 2 \cdot 8)/(-1) = 6;$

(4) $l_{32} = -2;$

(4a) $l_{42} = -3;$

(5) $l_{33} = 3 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = -1;$

(6) $l_{34} = (9 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3)/(-1) = l_{43}/-1 = 1;$

(6a) $l_{35} = (18 - 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6)/(-1) = 2.$

$x_3 = 1; \quad x_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1; \quad x_1 = 4 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1.$

يوضح الجدول 1.8 حل منظومة ثلاثة معادلات متماثلة مبسطة باستعمال المعادلة (1.10.3)

## 1.11 معكوسة المصفوفة *The Inverse of a Matrix*

المصفوفة المربعة من رتبة $n$ التي قطرها الرئيسي واحد وباقي عناصرها اصفار تدعى مصفوفة المطابقة ويرمز لها بالحرف $I$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.11.1)$$

يقال ان المصفوفة $A^{-1}$ هي معكوسة المصفوفة $A$ اذا تحقق

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \qquad (1.11.2)$$

نرمز لعناصر $A^{-1}$ بـ $b_{ij}$. من المعادلة ( 1.11.2 ) يظهر لنا ان $b_{ij}$ . هي جذور لـ $n$ من المنظومات الحاوية على $n$ من المعادلات التي معاملاتها هي $a_{ij}$ وحدودها الثابتة $c_i$ تساوي

$$1,0,0,0,\ldots; \quad 0,1,0,0,\ldots; \quad 0,0,1,0,\ldots; \quad \ldots. \qquad (1.11.3)$$

لمنظومة ثلاثة معادلات . مثلا تصبح المعادلة (1.11.2)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذه تعطي ثلاثةيمنظومات تتألف كل منها من ثلاث معادلات هي

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1,$$
$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0,$$
$$a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0;$$

$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0,$$
$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 1,$$
$$a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 0;$$

$$a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 0,$$
$$a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 0,$$
$$a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1.$$

وبذلك يصبح سهلا علينا حساب $b_{ij}$ بطريقة الحذف مستخدمين $n$ من مجموعات الثوابت التي على نمط المعادلة ( 1.11.3 ) .

ان النهج التالي يوضح لنا طريقة الحذف في عكس مصفوفة 3 في 3 . السطور التسعة الاولى في النهج تختزل المصفوفة $A$ الى مصفوفة مثلثية ، وتحذف السطور الثلاثة الباقية المجهولين $x_2, x_3$ من المعادلات (4) , (7) , (9) حتى نحصل في المعادلات ، (12), (11) , (9) على القيم $b_{3j}, b_{2j}, b_{1j}$, على التوالي . لاحظ ان الحل ابتدأ بوحدة المصفوفات $b_{ij}$ وانتهى بوحدة المصفوفات $a_{ij}$

| | [A] | | | [A⁻¹] | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_{1j}$ | $a_{2j}$ | $a_{3j}$ | $b_{1j}$ | $b_{2j}$ | $b_{3j}$ | Expl. | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | |
| 2 | 1 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | | |
| 3 | 1 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 | | |
| 4 | 1 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | (1/2)(1) | |
| 5 | 0 | 5/2 | 1/2 | −1/2 | 1 | 0 | (2) − (4) | |
| 6 | 0 | 1/2 | 7/2 | −1/2 | 0 | 1 | (3) − (4) | |
| 7 | 0 | 1 | 1/5 | −1/5 | 2/5 | 0 | (2/5)(5) | |
| 8 | 0 | 0 | 17/5 | −2/5 | −1/5 | 1 | −(1/2)(7) + (6) | $j$ |
| 9 | 0 | 0 | 1 | −2/17 | −1/17 | 5/17 | (5/17)(8) | 3 |
| 10 | 1 | 1/2 | 0 | 19/34 | 1/34 | −5/34 | −(1/2)(9) + (4) | |
| 11 | 0 | 1 | 0 | −3/17 | 7/17 | −1/17 | −(1/5)(9) + (7) | 2 |
| 12 | 1 | 0 | 0 | 11/17 | −3/17 | −2/17 | −(1/2)(11) + (10) | 1 |

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{17} & -\frac{3}{17} & -\frac{2}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{7}{17} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{2}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{5}{17} \end{bmatrix}$$

ان معرفة $A^{-1}$ ضرورية حيثما وجب حل منظومة تتكون من $n$ من المعادلات لمجموعة من الثوابت ( $n \ll m$ ) حيث الجذور $x_j$ المناظرة لمجموعة الثوابت $c_i$ معطاة كالتالي

$$x_j = c_1 b_{j1} + c_2 b_{j2} + \ldots + c_n b_{jn}. \qquad (1.11.4)$$

وعليه يكون الجذر $x_2$ للمنظومة

$$AX = C; \qquad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

حيث $A$ هى المصفوفة التى استعملت فى المثال السابق .

$$x_2 = 3(-\tfrac{3}{17}) - 2(\tfrac{7}{17}) - 6(-\tfrac{1}{17}) = -\tfrac{17}{17} = -1$$

## 1.12 طريقة المعاودة لكاوس – سايدل

**The Gauss-Seidel Iteration Method**

تسمى منظومة المعادلات الخطية بالقطرية اذا كان معامل مجهول مختلف في كل معادلة اكبر بالقيمة المطلقة من مجموع القيم المطلقة للمعاملات الاخرى . يقع المعامل الكبيرة عادة على القطر الرئيسي اي $a_{ii}$ . ان معظم المنظومات الناتجة من المسائل الفيزيائية تكون من النوع القطري .

ان للمنظومات القطرية خاصية اساسية وهي قابليتها للحل بطرق التقريب المتعاقب حيث تتميز طريقة المعاودة لكاوس – سايدل عن بقية هذه الطرق ببساطتها .

عند تطبيق طريقة كاوس – سايدل تحل كل معادلة للمجهول ذي المعامل الاكبر فيها

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n + k_1 \\ x_2 &= b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n + k_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{n,n-1}x_{n-1} + k_n \end{aligned} \qquad (1.12.1)$$

ثم يعوض بالطرف الايمن للمعادلة( 1.12.1 ) اية قيمة مبدئية ( تخمينية ) $x_j^{(0)}$ للمجاهيل وبذلك تقتنى قيم جديدة $x_j^{(1)}$ في الطرف الايسر.

ثم تعوض القيم الجديدة $x_j^{(1)}$ بالطرف الايمن في المعادلات وتقتنى قيم اخرى محسنة $x_j^{(2)}$ ويتوالى هذا النمط الى ان تتساوى $x_j^{(m)}$ مع $x_j^{(m+1)}$ للدرجة المطلوبة من الدقة فتكون $x_j^{(m)}$ عندئذ هي جذر المنظومة.

ان كل تقريب لجذر يحصل عليه بطريقة كاوس بعملية منفردة بالالة الحاسبة ولا تؤثر الاخطاء على اتمام الحل. حيث انها تعادل مجموعة جديدة من القيم الابتدائية. لان الطريقة ان كانت ملتمة (convergence) تلتم مهما كانت قيم الابتداء. اذا اخذنا التقريب الاخير للمجهول وعوضناه في الطرف الايمن من المعادلة ( 1.12.1 ) كما اقترح سايدل. فان سرعة التقارب تزداد بصورة كبيرة. ان اي حدس من شأنه تعجيل الالتمام مسموح به في اي مرحلة من العملية.
خذ المنظومة التالية كمثال في تطبيق طريقة كاوس – سايدل للمعاودة.

| Eqs. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 10 | 1 | 1 | 12 |
| II | 2 | 10 | 1 | 13 |
| III | 2 | 2 | 10 | 14 |

(a)

والتي عندما تكون جاهزة للمعاودة بالصيغة (1.12.1) تصبح

$$x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3;$$
$$x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3;$$
$$x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2.$$

انطلاقا بالقيم $x_2 = x_3 = 0$ فان المعادلة الاولى تعطي $x_1 = 1.2$ وبأخذ $x_3 = 0,\ x_1 = 1.2$ تعطي المعادلة الثانية $x_2 = 1.3 - 0.2 \cdot 1.2 = 1.06$ وبأخذ $x_2 = 1.06,\ x_1 = 1.2$ تعطي المعادلة الثالثه

$$x_3 = 1.40 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.2 \cdot 1.06 = 0.95$$

عند الرجوع الى المعادلة الاولى بالقيم $x_3 = 0.95, x_2 = 1.06$ نحصل على
$x_1 = 0.99$ وبمعاودة العملية نحصل على النتائج الموجودة في الجدول 1.9

جدول ( ٩-١ )

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1.20 | 0.99 | 1.00 | 1.00 |
| $x_2$ | 1.06 | 1.00 | 1.00 | |
| $x_3$ | 0.95 | 1.00 | 1.00 | |

جدول ( ١٠-١ )

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | −0.2 | −0.2 |
| $x_2$ | −0.1 | 1 | −0.2 |
| $x_3$ | −0.1 | −0.1 | 1 |
| $k$ | 1.20 | 1.30 | 1.40 |
| | (1.20) | −0.24 | −0.24 |
| | −0.11 | (1.06) | −0.24 |
| | −0.10 | −0.10 | (0.95) |
| | (0.99) | −0.20 | −0.20 |
| | −0.10 | (1.00) | −0.20 |
| | −0.10 | −0.10 | (1.00) |
| | (1.00) | −0.20 | −0.20 |
| | −0.10 | (1.00) | −0.20 |
| | −0.10 | −0.10 | (1.00) |
| | (1.00) | | |

عندما يكون انجاز العمليات بالمسطرة الحاسبة يفضل ان ترتب كما في الجدول ( 1.10 ) حيث كتبت المعادلة ( a ) بصورة عمودية . من الواضح ان العمليات المشمولة بالمعاودة قابلة للتمثيل بصيغة مصفوفة . ان حل المعاودة بطريقة كاوس ، مثلا ينص على

$$x_1^{(i+1)} = k_1 - b_{12}x_2^{(i)} - b_{13}x_3^{(i)} - \dots - b_{1n}x_n^{(i)}$$
$$x_2^{(i+1)} = k_2 - b_{21}x_1^{(i)} - b_{23}x_3^{(i)} - \dots - b_{2n}x_n^{(i)}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n^{(i+1)} = k_n - b_{n1}x_1^{(i)} - b_{n2}x_2^{(i)} - \dots - b_{n,n-1}x_{n-1}^{(i)}$$

او بصيغة المصفوفة ، على

$$X^{(i+1)} = K + BX^{(i)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b_{12} & -b_{13} \ldots & -b_{1n} \\ -b_{21} & 0 & -b_{22} \ldots & -b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b_{n1} & -b_{n2} \ldots & -b_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

## 1.13 حل المعادلات الخطية بطريقة الارخاء

**Solution of Linear Equations by Relaxation**

تشتمل هذه الطريقة في حل المعادلات الخطية على عمليات تقريبية متعاقبة حيث يتمكن الحاسب من استخدام مهارته وبديهته الرياضية بطرق متنوعة غير محدودة لتعجيل التمام النهج نحو الجواب الصحيح . ويعود اسم الارخاء وشيوعه الى جهود ساوثويل Southwell ومدرسته * خذ المعادلات التالية التي فيها القطر الرئيسي للمعاملات يساوي ( $-1$ ) الثوابت $k$ في الطرف الايسر من المعادلات

$$\begin{aligned} -x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n + k_1 &= 0 \\ b_{21}x_1 - x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n + k_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \ldots - x_n + k_n &= 0 \end{aligned} \qquad (1.13.1)$$

ارمز بـ $R_i$ ( البواقي ) لقيمة الطرف الايسرفي المعادلة ( $i$ ) لمجموعة مفترضة $x_j^{(0)}$ من قيم الانطلاق

$$\begin{aligned} -x_1^{(0)} + b_{12}x_2^{(0)} + b_{13}x_3^{(0)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(0)} + k_1 &= R_1 \\ b_{21}x_1^{(0)} - x_2^{(0)} + b_{23}x_3^{(0)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(0)} + k_2 &= R_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_{n1}x_1^{(0)} + b_{n2}x_2^{(0)} + b_{n3}x_3^{(0)} + \ldots - x_n^{(0)} + k_n &= R_n. \end{aligned} \qquad (1.13.2)$$

تتطلب طريقة الارخاء تغيير قيم الانطلاق ، منفردة او عدة قيم مرة واحدة ، حتى تكون جميع $R_i$ صغيرة لدرجة من الممكن اهمالها .

---

* انظر R. V. Southwell طريقة الارخاء في الفيزياء النظرية جامعة اكسفورد ١٩٤٦ كذلك طريقة الارخاء في العلوم الهندسية جامعة اكسفورد ولندن ١٩٤٠ كذلك . انظر D. N. de G. Allen طريقة الارخاء مكروهـل نيويورك ١٩٥٤

« لهذا الغرض» لاحظ مثلا انه لو تغير احد المجاهيل $x_j^{(0)}$ ، ولنقل $x_k^{(0)}$ بمقدار $\delta x_k$ فان $R_k$ يتغير بمقدار ( $-\delta x_k$ ) بينما تتغير القيم الاخرى من $R_i$ بمقدار $b_{ik}\delta x_k$ .
لكي نختزل قيمة $R_i$ ، ولنقل $R_k$ ، الى الصفر فاننا نغير $x_k^{(0)}$ بالمقدار $\delta x_k = R_k$ وبهذه العملية تتغير قيم البواقي الاخرى ويتحتم اختزالها الى الصفر واحد بواحد بتغيرات مناسبة $\delta x_i$ ومن الملائم ان يختزل اكبر باقي يظهر عند أي خطوة في النهج .

وتمارس هذه العملية للسهولة في صيغة جدول بكتابة قيمة الابتداء لكل مجهول $x_j^{(0)}$ والتغييرات المتعاقبة فيه في عمود وكتابة البواقي في عمود اخر . ( يكون الى يمين عمود $\delta x_j$ عادة) ، ولذلك فان لكل مجهول عمودان في جدول الارخاء . عندما تتلاشى البواقي للدرجة المطلوبة من ( الدقة) يعطي مجموع $x_j^{(0)}$ وجميع التغييرات $\delta x_j$ قيمة المجهول $x_j$ .
خذ على سبيل المثال النظام التالي :

| Eqs. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 10 | −2 | −2 | 6 |
| II | −1 | 10 | −2 | 7 |
| III | −1 | −1 | 10 | 8 |

(a)

التي تكون جاهزة للارخاء [ المعادلة (1.13.1) ] بالصيغة : −

| Eqs. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| I | −1 | 0.2 | 0.2 | 0.6 |
| II | 0.1 | −1 | 0.2 | 0.7 |
| III | 0.1 | 0.1 | −1 | 0.8 |

(b)

باستعمال قيم الانطلاق $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0,$ تكون البواقي المناظرة

$$R_1 = 0.60; \qquad R_2 = 0.70; \qquad R_3 = 0.80.$$

تظهر قيم الانطلاق الاولية $x_i^{(0)}$ والبواقي في الاعمدة $R_i, x_j$ على التوالي في السطر الاول من جدول ( 1.11 ) . ان اعظم باق هو $R_3 = 0.80$ وهو الذي يختزل اولا الى الصفر بتغيير $\delta x_3 = 0.80$ وهذا بدوره يدخل تغييرا $b_{23}\delta x_3 = 0.2 \cdot 0.80 = 0.16$ في $R_2$

كما يدخل تغييرا $b_{13}\delta x_3 = 0.2 \cdot 0.80 = 0.16$ في $R_1$

وعندئذ تصبح البواقي الجديدة

$$R_1 = 0.60 + 0.16 = 0.76$$
$$R_2 = 0.70 + 0.16 = 0.86$$
$$R_3 = 0.80 - 0.80 = 0.$$

يمحى الآن اكبر باق $R_2 = 0.86$ بتغير $\delta x_2 = 0.86$ والذي بدوره يدخل التغييرات

$$\delta R_3 = b_{32}\delta x_2 = 0.1 \cdot 0.86 = 0.09$$
$$\delta R_1 = b_{12}\delta x_2 = 0.2 \cdot 0.86 = 0.17.$$

والبواقي عند هذه المرحلة هي

$$R_1 = 0.76 + 0.17 = 0.93$$
$$R_2 = 0$$
$$R_3 = 0 + 0.09 = 0.09.$$

نعيد العملية على $R_1$ الذي هو اكبر البواقي بتغيير $\delta x_1 = 0.93$ والذي يدخل هو الاخر التغييرات

$$\delta R_2 = b_{21}\delta x_1 = 0.1 \cdot 0.93 = 0.09$$
$$\delta R_3 = b_{31}\delta x_1 = 0.1 \cdot 0.93 = 0.09.$$

تكرر العملية الى ان يتم اختزال البواقي الى وحدة واحدة في اخر رقم ذي دلالة

| $x_1$ | $R_1$ | $x_2$ | $R_2$ | $x_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.60 | 0 | 0.70 | 0 | 0.80 |
| | 0.16 | | 0.16 | 0.80 | −0.80 |
| | 0.76 | 0.86 | 0.86 | | 0 |
| | 0.17 | | −0.86 | | 0.09 |
| 0.93 | 0.93 | | 0 | | 0.09 |
| | −0.93 | | 0.09 | | 0.09 |
| | 0 | | 0.09 | 0.18 | 0.18 |
| | 0.04 | | 0.04 | | −0.18 |
| | 0.04 | 0.13 | 0.13 | | 0 |
| | 0.03 | | −0.13 | | 0.01 |
| 0.07 | 0.07 | | 0 | | 0.01 |
| | −0.07 | | 0.01 | | 0.01 |
| | 0 | | 0.01 | 0.02 | 0.02 |
| | 0 | | 0 | | −0.02 |
| | 0 | 0.01 | 0.01 | | 0 |
| | 0 | | −0.01 | | 0 |
| 1.00 | 0 | 1.00 | 0 | 1.00 | 0 |

جدول (١١-١)

وتكون قيمة $x_j$ هي مجموع الارقام في عمود $x_j$

$$x_1 = 0.93 + 0.07 = 1.00;$$
$$x_2 = 0.86 + 0.13 + 0.01 = 1.00;$$
$$x_3 = 0.80 + 0.18 + 0.02 = 1.00.$$

يجب ان يتحقق الشخص من النتائج التي يحصل عليها وذلك بتعويضها بالمعادلة الاصلية . من الناحية العملية تضاف التغييرات الى البواقي مباشرة دون كتابتها وعندئذ يتخذ النهج الشكل المضغوط ( المكبوس) للجدول 1.12 حيث ضربت جميع الارقام في (100) للتخلص من الفارزة العشرية

| $x_1$ | $R_1$ | $x_2$ | $R_2$ | $x_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ~~60~~ | 0 | ~~70~~ | 0 | ~~80~~ |
| | ~~76~~ | 86 | ~~86~~ | 80 | ~~9~~ |
| 93 | ~~93~~ | | ~~9~~ | 18 | ~~18~~ |
| | ~~4~~ | 13 | ~~13~~ | | ~~1~~ |
| 7 | ~~7~~ | 1 | ~~1~~ | 2 | ~~2~~ |
| 100 | | 100 | | 100 | |

جدول ( ١٢-١ )

لاجل ان تبين خواص متميزة اخرى لطريقة الارخاء سنحل المنظومة التالية (c) الجاهزة للارخاء والتي تمثل مشكلة فيزياوية سنتعامل فيها بالفصل الرابع [انظر الصفحة 196 ومايليها].

| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| −1 | 0.3951 | 0 | 0.2695 |
| 0.3556 | −1 | 0.3556 | 0.4763 |
| 0 | 0.3232 | −1 | 1.0717 |

(c)

ندور المعاملات $b_{ij}$ في التقريب الاول لرقم او رقمين لان الخطأ الناتج من التدوير يمكن محيه دائما بارخاء البواقي الاكثر دقة المحسوبة من المعاملات غير المدورة . ولذلك

فان المعاملات والثوابت في (c) تدور الى رقمين للحصول على دقة ١٪ ، ويستعمل جدول الارخاء :

| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $k$ | $B$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 0.40 | 0 | 0.27 | −0.60 | (d) |
| 0.36 | −1 | 0.36 | 0.48 | −0.28 | |
| 0 | 0.32 | −1 | 1.07 | −0.68 | |

ان قيم الانطلاق المفروضة هي

$$v_1^{(0)} = 0.25; \quad v_2^{(0)} = 0.50; \quad v_3^{(0)} = 0.75.$$

1.13

| $v_1$ | $R_1$ | $v_2$ | $R_2$ | $v_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | ~~22~~ | 50 | ~~34~~ | 75 | ~~48~~ |
| 42 | ~~42~~ | 51 | ~~51~~ | 48 | ~~16~~ |
| 8 | ~~8~~ | 21 | ~~15~~ | 16 | ~~7~~ |
| 2 | ~~2~~ | 5 | ~~2~~ | 7 | ~~2~~ |
| 1 | ~~1~~ | 2 | ~~3~~ | 2 | ~~1~~ |
| 78 | | | ~~5~~ | 1 | |
| | | | ~~1~~ | 149 | |
| | | | ~~2~~ | | |
| | | 129 | | | |

جدول (١٣-١)

وان البواقي $v_j^{(0)}$ هي :

$$R_1 = -0.25 + 0.40 \cdot 0.50 + 0.27 = 0.22;$$

$$R_2 = 0.36 \cdot 0.25 - 0.50 + 0.36 \cdot 0.75 + 0.48 = 0.34;$$

$$R_3 = 0.32 \cdot 0.50 - 0.75 + 1.07 = 0.48.$$

يعطي الجدول 1.13 حل المنظومة بارخاء اكبر باق في كل خطوة.

ان الجدول 1.14 يبين كيفية الحصول على رقمين اضافيين في $v_j$ بحساب البواقي المناظرة للقيم اعلاه من المعاملات الكاملة (غير المدورة) للمنظومة (c) ثم ارخائها بمعاملات (d) المدورة ، حيث يمحي اكبر باق في كل خطوة . ان كلا من البواقي والمجاهيل مضروبة في $10^4$ لتلافي الفارزة العشرية .

| $v_1$ | $R_1$ | $v_2$ | $R_2$ | $v_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7800 | ~~−8~~ | 12900 | ~~−65~~ | 14900 | ~~−14~~ |
| −34 | ~~−34~~ | −65 | ~~−12~~ | −35 | ~~−35~~ |
| −9 | ~~−9~~ | −24 | ~~−24~~ | −8 | ~~−8~~ |
| −2 | ~~2~~ | −6 | ~~−8~~ | −2 | ~~−2~~ |
| −1 | ~~1~~ | −2 | ~~−6~~ | 1 | ~~−1~~ |
| 7754 | | | ~~−1~~ | 14854 | |
| | | | ~~−2~~ | | |
| | | 12803 | | | |

جدول ( ١٤-١ )

طبقت طريقة الارخاء في الامثلة السابقة بصورة ميكانيكية بحيث ان الباقي الكبير يؤول دائماً الى الصفر . غير ان الطريقة تصبح متميزة الفائدة فيما اذا لم تستعمل قاعدة كهذه في الحل . في الارخاء الكتلي ( *block relaxation* ) مثلا . تغير جميع (أو مجموعة من ) المتغيرات بنفس الكمية $\delta$ كلما كان ذلك ملائماً . وبذلك يتغير الباقي بالمقدار .

$$\delta R_i = (-1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_{ij})\delta = B_i\delta, \qquad (1.13.3)$$

بينما تكون التغييرات في الارخاء الزاهد ( *underrelaxation* ) والارخاء المـفـرط ( *overrelaxation* ) من الصغر أو الكبر بحيث تعطي بواق جديدة بنفس أو عكس اشارة البواقي السابقة على التوالي .

يبين الجدول 1.15 حل منظومة المعاملات (c) . حيث

$$B_1 = -1 + 0.40 = -0.60,$$

$$B_2 = 0.36 - 1.00 + 0.36 = -0.28,$$

$$B_3 = 0.32 - 1 = -0.68,$$

لدقة ١٪ أولا بواسطة تغيير كتلي اولي مقداره 0.60+ وارخاء مفرط متعاقب . واقتنى بعدئذ رقمان اضافيان في الجذور بالارخاء البسيط .

ان السطرين الاخيرين يحتويان على البواقي المحسوبة من المعاملات الكاملة للمعاملات (c) وكذلك القيم النهائية .

| $v_1$ | $R_1$ | $v_2$ | $R_2$ | $v_3$ | $R_3$ | Explanations |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | ~~22~~ | 50 | ~~34~~ | 75 | ~~48~~ | $v_i^{(0)}$ and $R_i^{(0)}$ of Eqs. (d) |
| 60 | ~~−14~~ | 60 | ~~17~~ | 60 | ~~7~~ | Block change $\delta = 60$ |
| −7 | ~~−6~~ | 20 | ~~−3~~ | 15 | ~~18~~ | Overrelaxation |
| | 1 | | ~~2~~ | −2 | ~~−2~~ | |
| 78 | | | −1 | 148 | | Roots to 1 per cent |
| | | 130 | | | | |
| 7800 | ~~31~~ | 13000 | ~~−200~~ | 14800 | ~~119~~ | Residuals of Eqs. (c) |
| −49 | ~~−49~~ | −200 | ~~20~~ | 55 | ~~55~~ | Simple relaxation |
| 1 | ~~1~~ | 2 | ~~2~~ | 1 | ~~1~~ | |
| 7752 | ~~1~~ | 12802 | 0 | 14856 | ~~−1~~ | Roots to 0.01 per cent and check of residuals |
| 1 | | | | −1 | | Simple relaxation |
| 7753 | | 12802 | | 14855 | | Final values of roots |

جدول ( ١٥ - ١ )

ان من أكفا طرق استعمال الارخاء الكتلي هي اختزال الباقي الكلي ، أي مجموع كل $R_i$ الى صفر ، مثلا في جدول 1.16 فان حل المعاملات في المنظومة (e) يبدأ بتغيركتلي أولي يساوي سالب نسبة الباقي الكلي $-67 = (4 + 18 + 45)-$ الى معامل الارخاء B الكلي $-21 = -6 - 7 - 8$ ، أي $\delta x = -67/-21 \approx 3$ وان البواقي $\delta R_i$ المناظرة لها هي .

$$\delta R_1 = 3(-6) = -18; \quad \delta R_2 = 3(-7) = -21; \quad \delta R_3 = 3(-8) = -24.$$

ان لمجموعة البواقي الجديدة $(R_1 = -14, R_2 = -3, R_3 = 21)$ اشارات متناوبة وهي صفة تعجيل الالتمام .

وان تكملة الحل يتم بارخاء الباقي الاكبر

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $k$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|
| −10 | 2 | 2 | 4 | −6 |
| 1 | −10 | 2 | 18 | −7 |
| 1 | 1 | −10 | 45 | −8 |
| | | | 67 | −21 |

(e)

| $x_1$ | $R_1$ | $x_2$ | $R_2$ | $x_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ~~4~~ | 0 | ~~18~~ | 0 | ~~45~~ |
| 3 | ~~−14~~ | 3 | ~~−3~~ | 3 | ~~21~~ |
| | ~~−10~~ | | ~~1~~ | 2 | ~~1~~ |
| −1 | 0 | | 0 | | 0 |
| 2 | | 3 | | 5 | |

جدول ( ١٦– ١ )

ان المهارة المكتسبة بحل عدد من المنظومات وكذلك قدرا من التبصر (البداهة) بالمسألة سيوحيان عادة بالتغييرات التي تقود الى الجذور الصحيحة في بضعة دورات . ومن الضروري اجتياز العملية باختيار قيم $\delta x$ المناسبة عوضا عن محاولة محي البواقي بالضبط.

ان المبتدئين يميلون الى اختزال باق معين $R_i$ الى الصفر واختيار $\delta x_i$ التي تحقق هذه النتيجة غير انه من الاكثر ملائمة ان يتم اختيار $\delta x_i$ بارقام مدورة ثم حساب $\delta R_i$ المناظرة.

## 1.14 مجاميع غير منتهية من المعادلات

### *Sets of Infinite Equations*

عند حل العديد من المشاكل التقنية قد تحتاج الى تقييم جذور مجموعة غير منتهية من المعادلات الخطية . وهذه تتبع عادة من طرق التقريب المتعاقب وتقود الى جذور $x_j$ متناقصة القيمة المطلقة مع ازدياد $j$ . ولادراك اتجاه قيم المجاهيل يمكن اتباع الطريقة الاولية التالية. خذ اول $n$ من معادلات المنظومة وثلثها بالتعويض . ثم حل ، على التعاقب ، المعادلة الاولى بالنسبة الى $x_1$ ثم المعادلة الاولى والثانية بالنسبة الى $x_2, x_1$ ثم المعادلة الاولى والثانية والثالثة الى $x_3, x_2, x_1$ وهكذا مع تجاهل المجاهيل الاخرى ، بهذا نحصل على $n$ من التقريبات للمجهول $x_1$ ، $n-1$ من التقريبات للمجهول $x_2$ ، $n-2$ من التقريبات للمجهول $x_3$ وهكذا . ومن هذه القيم نستطيع ان نقيس تأثير المجاهيل الباقية على بضعة من المجاهيل الاولى. ان هذه الطريقة طبقت على المنظومة

$$-x_{j-1} + (j+1)x_j - x_{j+1} = 10; \qquad j = 1, 2, 3, \ldots \quad (x_0 = 0), \qquad \text{(a)}$$

باخذ المعادلات الستة الاولى فقط

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $C$ | Row | Expl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | −1 | | | | | 10 | 1 | I |
| −1 | 3 | −1 | | | | 10 | 2 | II |
| | −1 | 4 | −1 | | | 10 | 3 | III |
| | | −1 | 5 | −1 | | 10 | 4 | IV |
| | | | −1 | 6 | −1 | 10 | 5 | V |
| | | | | −1 | 7 | 10 | 6 | VI |
| 2 | −1 | | | | | 10 | 7 | (1) |
| | 5 | −2 | | | | 30 | 8 | 2(2) + (7) |
| | | 18 | −5 | | | 80 | 9 | 5(3) + (8) |
| | | | 85 | −18 | | 260 | 10 | 18(4) + (9) |
| | | | | 492 | −85 | 1110 | 11 | 85(5) + (10) |
| | | | | | 3359 | 6030 | 12 | 492(6) + (11) |
| 5.00 | | | | | | | 13 | |
| 8.00 | 6.00 | | | | | | 14 | |
| 8.89 | 7.78 | 4.44 | | | | | 15 | |
| 9.06 | 8.12 | 5.29 | 3.06 | | | | 16 | |
| 9.09 | 8.17 | 5.43 | 3.54 | 2.26 | | | 17 | |
| 9.09 | 8.18 | 5.44 | 3.60 | 2.57 | 1.80 | | 18 | |

## 1.15 تواؤم المعادلات

***Consistency of Equations***

( هي المعادلات التي شروط حلها متوفرة أو مكتملة )

يقال ان المصفوفة $m \times n$ من رتبة $r$ اذا كانت اكبر محددة لاصفرية لصغير محدد (*minor*) يمكن الحصول عليها من المصفوفة من رتبة r . فمثلا المصفوفة $2x3$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

سطرين وثلاثة اعمدة هو من مرتبة واحد لان صغارها

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

المستخلصة منه والتي من رتبة اثنين تساوي صفرا ( minors ) . لكن ليس جميع عناصرها ( صغائرها من رتبة واحد ) هي اصفار.

سوف ندرج هنا النظرية الاساسية لتواؤم المعادلات الخطية بدون اعطاء البرهان لها.

المنظومة التي تتكون من $m$ من المعادلات بـ $n$ من المجاهيل يكون لها حل في حالة وفي حالة فقط ماااذا كانت المصفوفة $A$ المشكلة من المعاملات والمصفوفة المزيدة ( augmented matrix ) $B$ ( المتكونة من اضافة عمود الثوابت الى مصفوفة المعاملات من رتبة واحدة ) مثلا المنظومة التالية

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 20 \end{aligned} \quad (a)$$

متوائمة لان كلا من $A$ ، $B$ من رتبة واحد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

ان نفس المنظومة مع عمود ثوابت

$$C = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

غير متوائمة . لان المصفوف المزيد

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

رتبة (2) كما هو مبين في صغير المحدد ادناه

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

عندما يكون عدد المجاهيل $n$ اكبر من الرتبة $r$ . فمن الممكن التعبير عن $r$ من المجاهيل بدلالة المجاهيل $n - r$ الباقية . مثلا.

$$x_1 = 10 - 2x_2 - 3x_3$$

تحقق كلا من المعادلتين في (a) بصورة متطابقة ومهما كانت قيمة $x_2$ و $x_3$ وفي الواقع ان لهذه المنظومة مالانهاية مزدوجة من الحلول . بالمثل . المنظومة

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 + 3x_2 = 15$$
$$2x_1 + 5x_2 = 25$$

لها المصفوفات التالية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 15 \\ 2 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

من رتبة (2) وجذور ( تقتنى بحل أية معادلتين من المنظومة بصورة آنية )

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 5,$$

التي تحقق المعادلات الثلاثة كلها . وهو حل وحيد unique لان $n = r = 2$

## 1.16 المعادلات المتجانسة *Homogeneous Equations*

ان المنظومة المتكونة من $n$ من المعادلات الخطية و$n$ من المجاهيل والتي تكون فيها جميع الثوابت $c_i$ اصفارا . اي منظومة متجانسة . لها حل دائما . حيث ان مصفوفتها المزيدة . بالضرورة من نفس رتبة مصفوفة معاملاتها.

يدعى هذا الحل حل الصفر ( *zero solution* ) او الحل بسيط (*trivial solution*)

وهو عبارة عن $x_j$ كلها تساوي صفرا.

يكون لهذه المعادلات حل غير بسيط ( nontrivial ) . ( اي الحل الذي يختلف عن الصفر ) في حالة وفي حالة فقط عندما تكون رتبة مصفوفة المعاملات $r$ اصغر من $n$

مثلا المنظومة

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \qquad \text{(a)} \\ 3x_1 + 3x_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

لها مصفوف معاملات من رتبة (2) وجذور

$x_1 = x_3; \qquad x_2 = -x_3; \qquad x_3 =$ اختياري

---

جمع الصغير هو صغار . الصحاح في العلوم للجوهري ص ٧٢٠ تحقيق عبد الله العلايلي معجم الرياضيات اعداد وزارة التربية الاردنية ص٢٥٦.

أي ان

$$\frac{x_1}{x_3} = 1; \qquad \frac{x_2}{x_3} = -1.$$

في كثير من مسائل الاهتزازات وعدم الاستقرار ( instability ) تعتمد معاملات منظومة

المعادلات الخطية المتجانسة على وسيط λ . وتوجد الحلول غير البسيطة لها ( غير الصفرية ) بايجاد قيم λ . وتدعى بالقيم المميزة . التي تجعل رتبة مصفوف المعاملات تساوي $(n - 1)$ مثلا

$$\begin{aligned} (2-\lambda)x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

ان قيم λ التي تجعل محدد العوامل يساوي صفرا تستخرج من المعادلة

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0,$$

ومنها

$$\lambda_1 = 3; \qquad \lambda_2 = 1.$$

وتصبح منظومة المعادلات المناظرة

| $\lambda = 1$ | $\lambda = 3$ |
|---|---|
| $x_1 + x_2 = 0$ | $-x_1 + x_2 = 0$ |
| $x_1 + x_2 = 0$ | $x_1 - x_2 = 0$ |

والتي جذورها هي ( موجهات مميزة )

$$x_1 = x_2; \qquad x_1 = -x_2.$$

يمكن الان تعيين الشرط الضروري والكافي ( necessary and sufficient ) لحل المعادلات الخطية بالمعاودة بدلالة الوسيط λ .يلتئم نسق المعاودة حيثما كانت القيم المميزة لمصفوفة المعاودة $B$ اقل من 1 في القيمة المطلقة.

ان حل المنظومة (b) لاكبر قيمة مميزة ونظيرها الموجه المميز ، يمكن الحصول عليه بالمعاودة بان نحزر مميزا . مثلا عند المنظومة (b) كالتالي :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وافتراض $x_1 = 2, x_2 = 1$ تعطي المعاودات المتعاقبة

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix} = \frac{13}{4} \begin{bmatrix} \frac{14}{13} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{13} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{41}{13} \\ \frac{40}{13} \end{bmatrix} = \frac{40}{13} \begin{bmatrix} \frac{41}{40} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{41}{40} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{122}{40} \\ \frac{121}{40} \end{bmatrix} = \frac{121}{40} \begin{bmatrix} \frac{122}{121} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ان المتجهات المميزة تعرف ضمن ثابت حيث جرت العادة على ان يؤخذ الواحد كعنصر من عناصره

ان التقريب الاخير يعطي

$$\lambda = \tfrac{121}{40} = 3.025; \qquad x_1 = \tfrac{122}{121} = 1.008; \qquad x_2 = 1.$$

## *1.17* المعادلات الآنية اللاخطية *Simultaneous Nonlinear Equations*

لاتوجد طرق عامة لحل المعادلات الآنية اللاخطية . نستخرج القيم الاولية للمجاهيل عادة بطريقة التجربة والخطأ . او بطريقة الرسم ثم يكمل الحل باستخدام طريقة المماس لنيوتن بشرط ان القيم الاولية قريبة لدرجة ما للجذور.

مثلا لو اعطينا المعادلتين غير الخطيتين التاليتين

$$f(x,y) = 0; \qquad \phi(x,y) = 0, \qquad (1.17.1)$$

وعرفنا ان التقريب الاولي هو ( $y_0$ و $x_0$ ) نفك الدالتين $f$ و $\phi$ بمتسلسلة تيلر حول النقطة ( $y_0$ و $x_0$ ) اخذين الحدود الخطية

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_0 + f_{x,0}h + f_{y,0}k + \ldots = 0 \\ \phi(x,y) &= \phi_0 + \phi_{x,0}h + \phi_{y,0}k + \ldots = 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

حيث

$$f_{x,0} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}; \qquad \ldots; \qquad \text{(b)}$$

و

$$h = x - x_0; \qquad k = y - y_0.$$

بحل المعادلتين الخطيتين في (a) بدلالة $k, h$ نحصل

$$h = -\frac{f_0\phi_{y,0} - \phi_0 f_{y,0}}{f_{x,0}\phi_{y,0} - \phi_{x,0}f_{y,0}}$$

$$k = -\frac{f_{x,0}\phi_0 - \phi_{x,0}f_0}{f_{x,0}\phi_{y,0} - \phi_{x,0}f_{y,0}} \qquad (1.17.2)$$

المعادلات (b) تعطي التقريب الاولي

$$x_1 = x_0 + h; \qquad y_1 = y_0 + k. \qquad (1.17.3)$$

ان تمديد الطريقة لاكثر من معادلتين هو مباشر . مثلا . لو اعطينا

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0; \qquad \phi(x,y) = x + y^3 + 2 = 0;$$

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y; \qquad \phi_x = 1, \quad \phi_y = 3y^2,$$

وانطلاقا من $y_0 = -0.5,\ x_0 = -1$ نحصل على مايلي ( صحيحة لرقمين عشريين ) .

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | −1.00 | −1.43 | −1.34 | −1.33 | −1.33 |
| $y$ | −0.50 | −1.10 | −0.92 | −0.88 | −0.88 |
| $f$ | −0.25 | −0.17 | −0.051 | −0.0055 | |
| $f_x$ | −2.00 | −2.86 | −2.64 | −2.66 | |
| $f_y$ | 1.00 | 2.20 | 1.84 | 1.76 | |
| $\phi$ | 0.88 | −0.76 | −0.12 | −0.0115 | |
| $\phi_x$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | |
| $\phi_y$ | 0.75 | 3.63 | 2.55 | 2.32 | |
| $h$ | −0.43 | 0.09 | 0.01 | 0 | |
| $k$ | −0.60 | 0.18 | 0.04 | 0.0046 | |

## 1.18 البرمجة الخطية Linear Programming

البرمجة الخطية هي اسلوب رياضي لحل مسائل مهمة تقنية اومالية اوتنظيمية والتي يجب اختيار عدد من المتغيرات فيها بحيث تجعل قيمة دالة خطية مافي هذه المتغيرات في قيمتها العظمى اوالصغرى ، وفي نفس الوقت نحقق بعض معادلات اومتباينات خطية ، يشار اليها عادة بالمقيدات ( constraints. ) . ادناه مسألة برمجة خطية نمطية .

لنفرض ان معملا ينتج نوعين من المنتوجات نوع A يتطلب ساعة من الحرق في الفرن وثلاث ساعات تصنيع ، بينما يتطلب النوع B ساعتين من الحرق واربع ساعات تصنيع . المصنع يربح ( 1 ) دينار لكل قطعة من A ويربح ( 3 ) دنانير عن كل قطعة من النوع B . يمكن للمعمل ان يضع 10 العمال في التصنيع يعمل كل منهم نوبة نظامية من ( 8 ) ساعات. كما ان فيه فرنا واحدا يشتغل ( 24 ) ساعة في اليوم للاقتصاد في الوقود . كم قطعة يصنع من النوع A وكم قطعة يصنع من النوع B حتى يكون ربحه اعظم مايمكن .

لنجعل $x_1$ , $x_2$ يشيران الى عدد القطع A , B على التوالي التي تعطي اكبر ربح . ان التصنيع محدود بعدد الساعة - رجل المتوفرة ( 10 عمال يشتغل كل منهم 8 ساعات بحيث

$$3x_1 + 4x_2 \leq 80. \qquad \text{(a)}$$

من ناحية اخرى انه يتطلب اشتغال الفرن ( 24 ) ساعة كون

$$x_1 + 2x_2 = 24. \qquad \text{(b)}$$

ليكن $p_1$ ربح القطعة من النوع A و $p_2$ ربح القطعة من النوع B ولذلك فان الربح اليومي يعطي بدالة خطية في $x_1$ , $x_2$

$$P = p_1x_1 + p_2x_2 = x_1 + 3x_2. \qquad \text{(c)}$$

قد نحاول ان نجد حلا لهذه المسألة باستخدام كل القوى العاملة المتوفرة في التصنيع ، اي بحل هاتين المعادلتين

$$3x_1 + 4x_2 = 80$$
$$x_1 + 2x_2 = 24.$$

ومنهما نحصل على $x_1 = 32$ ، $x_2 = -4$ وحيث ان من المستحيل انتاج عدد سالب من القطع B ، فعليه يكون هذا الحل لامعنى له ، اي ان المعمل لايستطيع استخدام 80 ساعة – رجل في التصنيع . الحل يتم بايجاد قيم غيرسالبة للمجاهيل ، اي $x_2 \geq 0$ ، $x_1 \geq 0$ تحققان المتباينه ( a ) والمعادلة ( b ) وبحيث تكون $P$ المعطاة في ( c ) اعظم مايمكن .

ان الطريقة المنفردة ( *simplex method* )*هي طريقة خطوة فخطوة ابتدائية لحل مسائل البرمجة الخطية وهي مبنية على النظرية التالية :

اذا وجب ان نحقق $n$ من المتغيرات $x$ عدداً $m \leq n$ من المقيدات ، فان قيمة التوافيق الخطية $P$ العظمى تقتنى بكون مالايزيد عن $m$ من المتغيرات ذات قيم لاصفرية .

في الحل التجريبي الابتدائي يعطي $m$ من مجموع المتغيرات $n$ قيما لاصفرية . ثم يعظم التوفيق الخطي $P$ باسقاط احد المتغيرات في الحل الابتدائي والاستعاضة عنه باحد المتغيرات الباقية التي اعطيت قيمة صفر أصلا . وتتوقف العملية عندما تصل $P$ قيمتها العظمى ، كما يتوضح من الحسابات .

ويتطلب الحل بالطريقة المنفردة بان نحول جميع المتباينات الى معادلات اولا وذلك باضاقفة متغيرات رخو ( *slack variables* ) بربح مقداره صفر ( حيث انها لاتمثل كميات طبيعية ) ثم نضيف متغيرات زائفة لجميع المعادلات ذات ربح سالب كبير $-L$ بحيث لايمكن ان تصل $P$ قيمتها العظمى الا اذا كانت هذه المتغيرات الزائفة تساوي صفرا ( ولكي تتحقق المعادلات فان قيم المتغيرات الزائفة يجب ان تكون صفرا ) . وهكذا فان متغير رخو $x_3$ ادخل في المعادلة ( a ) ومتغير زائف $x_4$ في المعادلة ( b ) بينما يصبح الربح

$$P = p_1x_1 + p_2x_2 + 0 \cdot x_3 - Lx_4 \qquad (c')$$

| $i \backslash j$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $C$ | $x_i$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 4 | 1 | 0 | 80 | $x_3$ | 0 |
| 4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 24 | $x_4$ | $-L$ |
| | | | | | | $-24\,L = P$ | |

* لاجل التوضيح الكامل لهذه الطريقة انظركتاب البرمجة الخطية – طرق وتطبيقات للمؤلف S. I. Gass,
McGraw-Hill Book Company نيويورك 1958

ان المعادلات الجديدة ( a ) ، ( b ) مع متغير الرخو $x_3$ ومتغير زائف $x_4$ تظهر في السطرين الثالث والرابع من الجدول ( 1.17 ) . الحل الابتدائي هو ذاك الذي فيه $x_1$ , $x_2$ أصفار و $x_3$ , $x_4$ ليست باصفار . وحيث ان $x_3$ , $x_4$ تظهران في مصفوفة الوحدة ( وهذا هو بسبب ادخال متغيرات زائفة على المعادلات ) . يكون الحل الاولي هو $x_4 = 24$ , $x_3 = 80$ يقتنى الربح المناظر بكتابة القيم $p_3 = 0$ , $p_4 = -L$ في عمود مجاور لهذه المتغيرات ثم حساب $P = \sum_i p_i x_i = -24L$

ان هذا ( الربح ) السالب الكبير يزاد باسقاط $x_3$ أو $x_4$ وادخال $x_1$ أو $x_2$ بدلا عنهما فمثلا . لو اخذت $x_2$ محل $x_4$ واعطيت القيمة $x_4$ . تصبح مجموعة المتغيرات الجديدة

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + \Delta x_1 = x_1 = 0; \\
x_2' &= x_2 + \Delta x_2 = r; \\
x_3' &= x_3 + \Delta x_3 = 80 + \Delta x_3; \\
x_4' &= x_4 + \Delta x_4 = x_4 - x_4 = 24 - 24 = 0.
\end{aligned} \qquad \text{(e)}
$$

بادخال هذه المتغيرات بالمعادلات ( 3 ) ، ( 4 ) من الجدول ( 1.17 ) نرى ان هذه المعادلات تتحقق اذا كان

$$
\begin{aligned}
4r + \Delta x_3 &= 0 \\
2r &= 24
\end{aligned}
$$

ومن هذا ينتج

$$x_1' = 0; \quad x_2' = r = 12; \quad x_3' = 80 - 4r = 32; \quad x_4' = 0;$$
$$P = 3x_2 + 0 \cdot x_3 = 36.$$

من ناحية اخرى لو اخذت $x_2$ محل $x_3$ لكنا حصلنا على

$$4r = 80; \quad 2r + \Delta x_4 = 0;$$
$$x_1' = 0; \quad x_2' = r = 20; \quad x_3' = 0; \quad x_4' = 24 - 2r = -16,$$

والذي هو حل غير مقبول لان جميع $x_i$ يجب ان تكون $\geq 0$ .

من الواضح ان وجود قواعد للتبديل يصبح ضروريا حالما يصبح عدد المتغيرات كبيرا وذلك لتجنب محاولات تفوق الحصر . يمكن تحديد هذه القواعد بسهولة بالطريقة التالية .

* Maximize ص٥٤٧ معجم المصطلحات العلمية الفنية والهندسية .تاليف احمد شفيق الخطيب

خذ معادلات الجدول 1.18 بنظر الاعتبار وليكن $x_j$ المتغير الذي سيحل محل $x_i$ من المحاولة الابتدائية فعندما تأخذ $x_j = r$ محل $x_i$ في المعادلة ذات الترتيب $i$ يكون التغير في الطرف الايسر $a_{ij}r - a_{ii}x_i = a_{ij}r - x_i$

وهذا يجب ان يساوي صفرا وعليه

جدول ( ١٨-١ )

| $-p_j$ | $-p_1$ | $-p_2$ | $-p_3$ | $-p_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i \backslash j$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $C = x_i$ | $p_i$ |
| 3<br>4 | $a_{31}$<br>$a_{41}$ | $a_{32}$<br>$a_{42}$ | $a_{33} = 1$<br>$a_{43} = 0$ | $a_{34} = 0$<br>$a_{44} = 1$ | $x_3$<br>$x_4$ | $p_3$<br>$p_4$ |
| | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $P$ | |

$$x'_j = r = \frac{x_i}{a_{ij}}. \qquad (1.18.1)$$

لاجل الحصول على قيم موجبة لجميع المتغيرات $x'_j$ لقيمة ما $j$ يجب ان تختار $i$ بحيث تعطي اصغر قيمة موجبة $r$

مثلا لقيمة $j$ تساوي $i = 4, 2$ تعطي $i = 3\,,\ r = \frac{24}{2} = 12$ تعطي $r = \frac{80}{4} = 20$ وعليه يجب اختيار $i = 4$

لاختيار $j$ يجب أن نحسب التغييرات التى تحصل في جميع المتغيرات نتيجة ادخال $x'_j = r$ في الحل الجديد عوضا عن المتغير القديم $x_i$

$$\Delta x_j = r,$$

$$\Delta x_i = -x_i = -a_{ij}r,$$

$$\Delta x_k = -a_{kj}r,$$

حيث $x_k$ هو احد المتغيرات التي تغيرت ( مثلا $x_3$ في الجدول 1.17 )

و

$$\Delta x_k + a_{kj}x'_j = 0$$

حتى تتحقق المعادلة $(k)$ في جدول ( 1.18 )، ان التغيير المناظر في $P$ يكون

$$\Delta P = p_j r - p_i a_{ij} r - \sum_k p_k a_{kj} r$$

او بجعل المجموع يحتوي كل التغييرات $x_j$ ، وبتسمية الحرف السفلي[1] الصغير الجاري $i$

$$\Delta P = -r[\sum_i p_i a_{ij} - p_j]. \qquad (1.18.2)$$

سيتم اختيار $x_j$ بحيث يكون $\Delta P$ عددا اكبيرا موجبا . من الممكن انجازهذا بسهولة باختيارال $j$ التي يكون فيها

$$\Delta_j = \sum_i p_i a_{ij} - p_j \qquad (1.18.3)$$

اكبرعدد سالب*. يحسب $\Delta_j$ باضافة $-p_j$ التي هي فوق $x_j$ في جدول 1.18 يجب ان يلاحظ ان جميع $\Delta_j$ لمتغيرات مصفوفة الوحدة هي اصفار . ان الجدول العائد للمسألة الحالية 1.19 ، يبين ان اكبر قيمة $\Delta_j$ سالبة هي($\Delta_2 = -2L - 3$) فعليه $j = 2$ بينما اصغر $r = x_i/a_{i2}$ هي $x_4/a_{42} = 12$ وعليه نأخذ $x_2$ بدلاً من $x_4$

| $-p_j$ | $-1$ | $-3$ | $0$ | $L$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i \backslash j$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $C$ | $x_i$ | $p_i$ |
| 3 | 3 | 4 | 1 | 0 | 80 | $x_3$ | 0 |
| 4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 24 | $x_4$ | $-L$ |
| $\Delta_j$ | $-L-1$ | $-2L-3$ | 0 | 0 | $-24L$ | $P$ | |

جدول 1.19

للحصول على القيم الجديدة $x_j$ للمتغيرات ، يتم توفيق المعادلات (3)و(4) من الجدول ( 1.19 ) خطيا لأجل الحصول على مصفوفة المتطابقة في المتغيرات اللاصفرية الجديدة $x_3, x_2$ كما هومبين في الجدول 1.20

| $-p_j$ | $-1$ | $-3$ | $0$ | $L$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i \backslash j$ | $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | $x_4'$ | $C$ | $x_i$ | $p_i$ | Expl. |
| 3 | 1 | 0 | 1 | $-2$ | 32 | $x_3$ | 0 | (3) − 2(4) |
| 2 | 1/2 | 1 | 0 | 1/2 | 12 | $x_2$ | 3 | (1/2)(4) |
| $\Delta_j$ | (3/2) − 1 | 0 | 0 | (3/2) + $L$ | 36 | $P'$ | | |

جدول (١-٢٠)

(*) اختيار $j$ هنا لايضمن اعظم زيادة في $P$ حيث ان اصغر $\Delta_j$ مع اكبر $r$ قد تعطي اكبر $\Delta P$

ان القيم الجديدة هي $x_2' = 12$, $x_3' = 32$ وقيمة $P$ الجديدة هي $P' = 36$

وبما ان جميع $\Delta_j$ موجبة فان اي تغيير جديد في المتغيرات ينقص قيمة $P$ .

ان الحل الامثل هو $P = 36. x_2 = 12, x_1 = 0$

ان مسألة البرمجة الخطية التالية محلولة في جدول 1.21

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10; \quad x_2 + x_3 \leq 20; \quad -x_2 + 2x_3 \leq 15;$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad P = x_1 - x_2 + 4x_3 = \max.$$

| $-p_j$ | $-1$ | $+1$ | $-4$ | $0$ | $0$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i \backslash j$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $C$ | $x_i$ | $p_i$ | Expl. | |
| 1 | 1 | 2 | −3 | 0 | 0 | 10 | $x_1$ | 1 | | $j = 3$ |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 20 | $x_4$ | 0 | | $i = 5$ |
| 5 | 0 | −1 | 2 | 0 | 1 | 15 | $x_5$ | 0 | | $r = 15/2$ |
| $\Delta_j$ | 0 | 3 | −7 | 0 | 0 | 10 | $P$ | | | |
| 1′ | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 3/2 | 65/2 | $x_1'$ | 1 | (1) + (3/2)(5) | $j = 2$ |
| 4′ | 0 | 3/2 | 0 | 1 | −1/2 | 25/2 | $x_4'$ | 0 | (4) − (1/2)(5) | $i = 4$ |
| 3′ | 0 | −1/2 | 1 | 0 | 1/2 | 15/2 | $x_3'$ | 4 | (1/2)(5) | $r = 25/3$ |
| $\Delta_j$ | 0 | −1/2 | 0 | 0 | 7/2 | 125/2 | $P'$ | | | |
| 1″ | 1 | 0 | 0 | −1/3 | 5/3 | 85/3 | $x_1''$ | 1 | (2/3)(4) | |
| 2″ | 0 | 1 | 0 | 2/3 | −1/3 | 25/3 | $x_2''$ | −1 | (1′) − (1/2)(2″) | |
| 3″ | 0 | 0 | 1 | 1/3 | 1/3 | 35/3 | $x_3''$ | 4 | (3′) + (1/2)(2″) | |
| $\Delta_j$ | 0 | 0 | 0 | 1/3 | 10/3 | 200/3 | $P''$ | | | |

جدول ( ١٢-١ )

لاحظ انه لم تضف متغيرات زائدة للمعادلة لان $x_1$ ظهرت اصلا بمعادلات على شكل وحدة المتجهات ، ان الحل الامثل $P = \frac{200}{3}$ $x_1 = \frac{85}{3}$, $x_2 = \frac{25}{3}$, $x_3 = \frac{35}{3}$

اقتني بقيمة $x_2$ لاصفرية من ان وحدة ربح $x_2$ هي سالبة $p_2 = -1$ من الممكن توسيع الطريقة المفردة ( simplex method ) لمسائل اكثر شمولا كما يأتي : -

(a) المسائل التي تتضمن تصغير دالة خطية $f$ للمتغيرات $x_j$ تحل بتعظيم الدالة

$$\phi(x_j) = -f(x_j)$$

(b) التقييدات من نوع

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq c_i$$

تختزل الى النوع اعلاه بكتابة

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -c_i$$

(c) التقييدات من نوع

$$x_j \geq a_j$$

تختزل الى تقييدات « متغير موجب» بواسطة المتغيرات الجديدة

$$y_j = x_j - a_j \geq 0$$

(d) التقييدات من نوع $x_j \leq b_j$

تختزل الى تقييدات « متغير موجب» بواسطة المتغيرات الجديدة

$$y_j = b_j - x_j \geq 0$$

(e) التقييدات من نوع $a_j \leq x_j \leq b_j$

تختزل الى التقيدات $1 \geq y_j \geq 0$

بالمتغيرات الجديدة

$$y_j = \frac{b_j - x_j}{b_j - a_j}$$

ثم تؤخذ التقييدات المضافة $1 - y_j \geq 0$

بنظر الاعتبار في الحسابات

(f) بما ان جميع التقييدات قد تكون معادلات ، لذلك فان الطريقة المفردة هي طريقة لحل المعادلات الخطية الآنية ايضا .

(g) قد لايكون هناك حل لمسألة برمجة خطية . يتبين هذا باستحالة الحصول على ربح موجب .

## : تمارين :

1.1 جد جذور المعادلات التالية مستخدما طريقة المماس لنيوتن والتعويض التركيبي للارقام المعنوية المبينة ازاء كل منها .

(a) $x^3 + 1.2x^2 - 4x - 4.8 = 0$ (two figures).
(b) $x^3 - 0.87x^2 - 15.651x + 23.701 = 0$ (three figures).
(c) $x^3 + 6.6x^2 - 29.05x + 22.64 = 0$ (three figures).

الاجوبة

(a) $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1.2$. (c) $x_1 = 2.10$; $x_2 = -9.80$; $x_3 = 1.10$.

1.2 جد جذور المعادلات التالية لثلاثة ارقام معنويه بطريقة نيوتن ذات المرتبة الثانية وطريقة لتعويض التركيبي وطريقة المعادلات ذات الدرجة الثانية كلما دعت الضرورة لذلك.

(a) $x^3 + 2.9x^2 + 14.89x + 6.85 = 0.$
(b) $x^3 - 2.4x^2 - 1.4x - 6.8 = 0.$
(c) $x^4 + 6.4x^3 + 24.04x^2 + 36.96x + 18.72 = 0.$
(d) $x^4 - 2x^3 + 1.99x^2 - 2x + 0.99 = 0.$
(e) $x^4 - x^3 - 0.44x^2 - 13.88x + 2.8 = 0.$

الاجوبة

(b) $x_1 = 3.40;\ x_{2,3} = -0.500 \pm 1.323i.$

(d) $x_1 = 1.100;\ x_2 = 0.900;\ x_{3,4} = \pm i.$

1.3 جد جذور المعادلات التالية لاربعة ارقام معنوية . استخدم الاستكمال الخطي والتعويض التركيبي لايجاد الجذر الاعظم

(a) $x^3 - 4.65x^2 - 49.92x - 76.67 = 0.$
(b) $x^3 + 6.8x^2 - 62.49x + 63.468 = 0.$
(c) $x^3 - 13.6x^2 - 57.4x - 228.8 = 0.$
(d) $x^3 - 10.2x^2 - 51.8x - 71.00 = 0.$

الاجوبة

(a) $x_1 = 10.25;\quad x_2 = -3.40;\quad x_3 = -2.20.$

(c) $x_1 = 17.6;\quad x_{2,3} = -2.00 \pm 3.00i.$

1.4 جد لثلاثة ارقام عشرية الجذور الاربعة لكل من المعادلات التالية التي في كل منها يوجد جذران متساويان تقريبا .

(a) $x^4 - 0.41x^3 + 1.632x^2 - 9.146x + 7.260 = 0.$
(b) $x^4 - 5.81x^3 + 7.64x^2 + 7.2x - 14.47 = 0.$

الاجوبة .

(a) $x_1 = 1.21;\ x_2 = 1.20;\ x_{3,4} = -1.00 \pm 2.00i.$

1.5 جد جذور المعادلات التالية لثلاثة ارقام معنوية مستخدما (a) طريقة كرافي (b) طريقة فرايدمن في تعيين الجذور المركبة.

(a) $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0.$
(b) $x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x - 30 = 0.$

الاجوبة (a) $(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 6x + 8);\ x_i = 2, 1, -3, 4.$

1.6 جد جذور المعادلات التالية لثلاث ارقام معنوية مستعملا (a) طريقة كرافي (b) طريقة فريدمان لايجاد الجذور المركبة .

(a) $x^4 - 14x^3 + 69.09x^2 + 182.56x + 109 = 0.$
(b) $x^5 - 20.2x^4 + 132.18x^3 - 60.592x^2 - 72.693x - 14.525 = 0.$
(c) $x^4 + 18x^3 + 245x^2 + 496x + 1040 = 0.$
(d) $x^4 - 6.4x^3 + 40.04x^2 - 100.96x + 226.72 = 0.$

الاجوبة

(a) $x_{1,2} = -1.00 \pm 0.30i;\ x_{3,4} = 8.00 \pm 6.00i.$
(c) $x_{1,2} = -8 \pm 12i;\ x_{3,4} = -1 \pm 2i.$

1.7 جد الجذور الحقيقية لثلاثة ارقام معنوية للمعادلة التالية مستخدما طريقة المماس لنيوتن

$$\cos x = x^2.$$

الاجوبة

$$x_{1,2} = \pm 0.824.$$

1.8 جد اصغر جذرين موجبين لكل من المعادلات التالية (لثلاث ارقام معنوية )مستخدما
(a) طريقة المماس لنيوتن
(b) طريقة نيوتن من المرتبة الثانية

(a) $\tan x = \tanh x.$
(b) $\cos x \cosh x + 1 = 0.$
(c) $\cos x \cosh x = 1.$
(d) $\tan x = x.$
(e) $\tan x = -x.$
(f) $\tan x = 2x.$
(g) $x \tan x = 1.$
(h) $x \tan x = 2.$

الاجوبة

(a) $x_1 = 3.93;\ x_2 = 7.07.$ (c) $x_1 = 4.73;\ x_2 = 7.85.$
(e) $x_1 = 2.03;\ x_2 = 4.91.$ (g) $x_1 = 0.860;\ x_2 = 3.43.$

1.9 جد اصغر جذر موجب لثلاث ارقام لثلاث ارقام معنوية للمعادلة التالية بطريقة فتح الدوال بالمتسلسلات الاسية

$$x \tan x = 1.$$

الاجوبة

$$x_1 = 0.860.$$

1.10 جد الجذور الموجبة لثلاث ارقام معنوية للمعادلة التالية بطريقة فك الدوال بالمتسلسلات الاسية

$$\cos x = x^2.$$

1.11 جد الصفرين الاولين في دالة بسل Bessel من النوع الاول والمرتبة الاولى لثلاثة ارقام معنوية مستخدما طريقة نيوتن

ملاحظة : استخدم جدول دوال بَسِلْ وتذكر :

$$J_1'(x) = -\frac{1}{x} J_1(x) + J_0(x).$$

الاجوبة $x_1 = 3.83;\ x_2 = 7.02.$

1.12 جد الجذور المركبة للمعادلات المتسامية التالية :

(a) $\cosh z = 4.$ (b) $\sin z = 2.$ (c) $e^{2z} + z = 2,$

الاجوبة

(b) $z_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} + 1.32i, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots.$

1.13 عيّن جذور النظم التالية لثلاثة ارقام معنوية مستخدما طريقة المحددات.

(a)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | −2 | 14 |
| 1 | 3 | −4 | 16 |
| −1 | 2 | 3 | 1 |

(b)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 3.0 | −4.0 | 2.4 | 2.0 | −21.3 |
| −3.0 | 1.0 | 4.2 | −3.0 | −15.4 |
| 2.0 | 1.5 | 1.0 | 6.2 | 1.7 |
| 4.0 | −1.0 | −3.4 | 3.0 | 10.3 |

(c)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 3.0 | −1.3 | 4.0 | 3.9 |
| −2.0 | 4.5 | 3.2 | 10.4 |
| 1.4 | 2.0 | −3.0 | 7.7 |

الاجوبة $Ans.$ (b) $x_1 = -1.5; x_2 = 2.0; x_3 = -4.5; x_4 = 1.0.$

1.14 جد لثلاثة ارقام معنوية جذور النظم التالية مستخدما نهج كاوس Gauss scheme

(a)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 3.5 | 2.8 | 6.2 | 9.87 |
| 2.7 | 8.0 | 3.0 | −6.17 |
| −4.0 | −3.6 | −2.8 | 5.65 |

(b)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 2.1 | −4.5 | −2.0 | 19.07 |
| 3.0 | 2.5 | 4.3 | 3.21 |
| −6.0 | 3.5 | 2.5 | −18.25 |

(c)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 2.0 | −4 | −3.25 | 1 | 4.84 |
| 3.0 | −3 | −4.30 | 8 | 8.89 |
| 1.0 | −5 | 3.30 | −20 | −14.01 |
| 2.5 | −4 | 2.00 | −3 | −20.29 |

(d)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | −2 | 5.3 | −2.1 | 1.0 | 28.3 |
| 1 | 4 | −6.0 | 4.5 | −6.0 | −36.2 |
| 3 | 6 | −7.3 | −9.0 | 3.4 | 24.5 |
| −2 | −3 | 1.0 | −4.0 | 6.0 | 16.2 |
| 1 | −4 | 6.5 | 1.0 | −3.0 | 4.3 |

الاجوبة (b) $x_1 = 1.34;\ x_2 = -4.76;\ x_3 = 2.58.$

(d) $x_1 = 2.06;\ x_2 = 3.22;\ x_3 = 4.03;\ x_4 = -2.01;\ x_5 = 3.00.$

1.15 جد اول تقريب لجذور المعادلات التالية مستخدما مخطط كاوس ومستخدما المسطرة الحاسبة حاسبا الاخطاء باليد أو بالآلة الحاسبة . بعد ذلك جد ارقام معنوية اضافة لذلك بحل معادلات الخطأ بالمسطرة الحاسبة .

(a)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 3.5 | 2.8 | 6.2 | 9.8999 |
| 2.7 | 8.0 | 3.0 | 6.1744 |
| 4.0 | 3.6 | 2.8 | 5.6512 |

(b)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 1.0 | −3.25 | 1.0 | 4.8392 |
| 3.0 | −3.0 | −4.30 | 8.0 | 8.8581 |
| 1.0 | −5.0 | 3.30 | −20.0 | −13.9212 |
| 2.5 | −4.0 | 2.00 | −3.0 | −20.2815 |

الاجوبة (a) $x_1 = -3.0347;\ x_2 = -1.1904;\ x_3 = 3.8475.$

**1.16 انجز عمليات المصفوفات التالية**

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

الاجوبة

*Ans.* (a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 11 & 3 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 19 & 6 \\ 7 & 12 & -3 \\ 15 & 40 & 10 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 18 & 5 & 6 & 4 \\ 28 & 17 & -10 & 3 \\ 11 & 11 & 5 & 2 \\ 10 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

**1.17** جد لثلاثة ارقام معنوية جذور الانظمة التالية مستخدما طريقة كولسكي Cholesky

(a)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 2.5 | −3.0 | 4.6 | − 1.05 |
| −3.5 | 2.6 | 1.5 | −14.46 |
| −6.5 | −3.5 | 7.3 | −17.735 |

(b)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| −3.60 | 2.40 | 1.50 | −1.359 |
| 1.40 | −1.30 | 2.65 | −3.725 |
| 4.26 | −3.00 | 2.85 | −3.623 |

(c) System of Problem 1.14(c).
(d) System of Problem 1.14(d).

(e)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | −1 | 4 | −3 | 1 | 11 |
| −1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 14 |
| 4 | 2 | 3 | 3 | −1 | 4 |
| −3 | 1 | 3 | 2 | 4 | 16 |
| 1 | 3 | −1 | 4 | 4 | 18 |

**الاجوبة** (a) $x_1 = 1.24$; $x_2 = -2.45$; $x_3 = -2.50$. (c) $x_1 = 2.34$; $x_2 = 4.51$; $x_3 = -6.00$; $x_4 = -1.30$. (e) $x_1 = 1.00$; $x_2 = 2.00$; $x_3 = 1.00$; $x_4 = -1.00$; $x_5 = 4.00$.

**1.18** جد مقلوب كل من المصفوفات التالية

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

**الاجوبة**

(b) $\begin{bmatrix} \frac{9}{29} & \frac{1}{29} & \frac{-4}{29} \\ \frac{15}{58} & \frac{-4}{29} & \frac{3}{58} \\ \frac{-13}{29} & \frac{5}{29} & \frac{9}{29} \end{bmatrix}$

1.19 جد لثلاثة ارقام معنوية جذور الانظمة التالية بطريقة المعاودة

(a)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| −6 | 1 | 1 | −1133 |
| 1 | −6 | 1 | −3200 |
| 1 | 1 | −6 | −4200 |

(b)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| −1 | 0.4 | 0.5 | −1.41 |
| 0 | −1 | 0.3 | 2.81 |
| 0.2 | 0.3 | −1 | −4.48 |

(c)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 8 | 6 | 0 | 16.4 |
| 0 | 10 | 8 | 4 | −3.8 |
| 2 | 0 | 10 | 2 | 36.9 |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 30.9 |

(d)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 15 |
| 2 | 10 | 2 | 1 | 1 | 17 |
| 2 | 1 | 10 | 1 | 2 | 18 |
| 1 | 2 | 2 | 10 | 2 | 19 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 10 | 25 |

(e)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 8.0 | −2.4 | −1.6 | 2.0 | 0 | 12.00 |
| 0 | 10.0 | 0 | −4.0 | −2.3 | 21.06 |
| 0 | 3.2 | 8.0 | 1.6 | 2.4 | −23.28 |
| −3.2 | 0 | 4.8 | 10.0 | 2.1 | −14.06 |
| −1.6 | 0 | 1.6 | 2.4 | 8.0 | −22.32 |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.00 | 0.80 | 0 | 1.20 | 0 | 5.60 |
| 0 | 8.00 | 1.60 | 1.60 | 2.40 | −13.472 |
| 2.40 | 0.80 | 8.00 | 0 | 1.60 | 30.16 |
| 0 | 1.80 | 0 | 6.00 | 0.60 | 6.54 |
| 2.20 | 0 | 2.30 | 1.50 | 10.00 | −15.631 |

(f)

الاجوبة

(a) $x_1 = 467$; $x_2 = 762$; $x_3 = 905$. (c) $x_1 = 2.40$; $x_2 = -3.20$; $x_3 = 3.00$; $x_4 = 1.05$. (e) $x_1 = 1.20$; $x_2 = 2.00$; $x_3 = -3.25$; $x_4 = 1.00$; $x_5 = -2.20$.

1.20 جد لثلاثة ارقام معنوية جذور المعادلات في الانظمــة التاليــة بطريقــة الارخاء ( relaxation )

(a) النظام في التمرين 1.19(b)

(b)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| −6 | 2 | 4 | 0 |
| 1 | 1 | −5 | −350 |
| 1 | −6 | 2 | −700 |

(c) النظام في التمريــن 1.19(c).

(d) النظام في التمريــن 1.19(e).

(e) النظام في التمريــن 1.19(f).

الاجوبة

(b) $x_1 = 155$; $x_2 = 189$; $x_3 = 139$. (e) $x_1 = 1.20$; $x_2 = -2.00$; $x_3 = 4.23$; $x_4 = 2.00$; $x_5 = -3.10$.

1.21 حل بطريقة التزهيد لثلاثة ارقام معنوية كل من المعادلات في الانظمة التالية مستحصلا اولا تقريبا غير دقيق للجذور بطريقة تدوير المعاملات كما مبين ادناه

(a)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 0.875 | 0.121 | 1.132 |
| 0.444 | $-1$ | 0.222 | $-1.266$ |
| 0.092 | 0.545 | $-1$ | $-2.256$ |

(b)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 10.22 | 1.25 | 3.12 | 21.047 |
| 1.25 | 10.45 | 4.15 | 62.440 |
| 3.12 | 4.15 | 10.62 | 109.726 |

الاجوبة (a) $x_1 = 2.10; x_2 = 3.12; x_3 = 4.15.$

**1.22** جد $x_1$ و $x_2$ لثلاثة ارقام معنوية لكل من المعادلات غير المحدودة مستخدما طريقة التقريب المتعاقب

(a) $-2x_{j-1} + (2j+4)x_j - jx_{j+1} = 6 \quad (x_0 = 0).$

(b) $-x_{j-1} + (j+3)x_j - 2x_{j+1} = 12 \quad (x_0 = 0).$

الاجوبة *Ans.* (a) $x_1 = 1.22; x_2 = 1.34.$

**1.23** عين رتبة ( rank ) كل مصفوفة من المصفوفات التالية

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ \text{[illegible]} & 6 & -9 \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 10 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

الاجوبة (a) [illegible] (c) $r = 3.$

**1.24** افحص منظومة المعادلات التالية من حيث توافقها مستخر-

(a) $4x_1 + \text{[illegible]}x_2 + 2x_3 = 6;$
$5x_1 - \text{[illegible]}4x_2 + 10x_3 = -8;$
$4x_1 - 15x_2 - 6x_3 = \text{[illegible]}4.$

(b) $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5;$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6;$
$-3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 15.$

(c) $4x - 2y + 6z = 8;$
$x + y - 3z = -1;$
$15x - 3y + 9z = 21.$

(d) $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3;$
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 4;$
$3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1.$

(e) $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5;$
$2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10.$

**الاجوبة**

(a) Consistent; $x_1 = -3.03$; $x_2 = -1.30$; $x_3 = -1.10$.
(c) Consistent; $x = 1$; $y = 3z - 2$; $z =$ arb.

**1.25 افحص مجموعة المعادلات المتجانسة التالية وجد الحلول التي تختلف عن الصفر اذا وجد لكل منها .**

(a) $x + y + 4z = 0;$
$2x - y - z = 0;$
$6x + 4y + 18z = 0.$

(b) $4x - 2y + z = 0;$
$2x - y + 3z = 0;$
$6x - 3y - 6z = 0;$
$6x - 3y + 4z = 0.$

(c) $2x + 2y + 2z + 2t = 0;$
$2x + 6y + 4z + 4t = 0;$
$7x + 9y + 8z + 8t = 0;$
$5x + 3y + 4z + 4t = 0.$

(d) $2x - y + 3z = 0;$
$4x + 8y - 4z = 0;$
$3x + 4y + 2z = 0.$

**الاجوبة**

(b) $x =$ arb.; $y = 2x$; $z = 0$.
(d) $x = y = z = 0$.

**1.26 – (a) جد اصغر قيمة مميزة للوسيط $\lambda$ المتجهات المميزة المقابلة لها (b) جد بطريقة التكرار اكبر قيمة مميزة للوسيط$\lambda$المقابل لها$x$وكذلك المتجه المميز المقابل لهذا الوسيط .**

(a) $(4 - \lambda)x_1 + x_2 = 0;$
$x_1 + (3 - \lambda)x_2 = 0.$

(b) $(3 - 2\lambda)x_1 + x_2 = 0;$
$2x_1 + (5 - \lambda)x_2 = 0.$

(c) $(20-2\lambda)x_1 - 16x_2 + 8x_3 + (2\lambda - 16)x_4 = 0;$
$-8x_1 + (22-2\lambda)x_2 + (2\lambda - 16)x_3 + 4x_4 = 0;$
$2x_1 + (\lambda - 8)x_2 + (22-2\lambda)x_3 - 8x_4 = 0;$
$(\lambda - 8)x_1 + 4x_2 - 16x_3 + (20-2\lambda)x_4 = 0.$

(d) $(\lambda - 2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0;$
$x_1 + (\lambda - 1)x_2 - 5x_3 = 0;$
$3x_1 - 5x_2 + (2\lambda - 3)x_3 = 0.$

الاجوبة

(a) $\lambda_{min.} = 2.38;\ x_2/x_1 = -1.62.$ (b) $\lambda_{max.} = 5.27;\ x_2/x_1 = 7.54.$
(c) $\lambda_{min.} = 63.814.$ (d) $\lambda_{max.} = 6.03;\ x_1/x_3 = -1.04,\ x_2/x_3 = 1.20.$

**1.27** جد لثلاثة ارقام معنوية لكل زوج من المعادلات الآنية غير الخطية تبدأ من النقطة الاولية المؤشرة ازاء كل منها .

(a) $x^2 - 2y^2 + 4.82 = 0;\quad x_0 = 1.30;\quad y_0 = 1.70;$
$2x + 4y^2 - 16.74 = 0.$

(b) $x^3 + 3y^2 - 20.92 = 0;\quad x_0 = 1.30;\quad y_0 = -2.00;$
$x^2 + 2y + 1.958 = 0.$

(c) $x^3 + 4z^2 + 14.30 = 0;\quad x_0 = -2.50;\ z_0 = 2.00;$
$-x^2 + 6z - 3.44 = 0.$

الاجوبة

(b) $x = 1.65;\ y = -2.34.$

**1.28** في مسائل البرمجة الخطية التالية استعظم(*) الفائدة $P$

(a) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 10;$
$x_2 + x_3 \leq 20;$
$-x_2 + 2x_3 = 15;$
$P = x_1 - x_2 + 4x_3.$

(b) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 20;$
$x_2 + 2x_3 \leq 30;$
$-x_2 + 4x_3 \leq 10;$
$P = x_1 - 3x_2 + 4x_3.$

(c) $x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0;$
$2x_1 + 3x_2 - 4x_4 \leq 5;$
$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 10;$
$4x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq 8;$
$P = x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4.$

الاجوبة

(b) $x_1 = 22.5;\ x_2 = 0;\ x_3 = 2.50;\ P = 32.5.$

---

* استعظم اي جد النهاية العظمى على وزن استفعل (٤) ص١١ جـ١ مجمع الوسيط . معجم اللغة العربية بالقاهرة المترجمون

# الفصل الثاني

# الفروق المحدودة وتطبيقاتها العملية

# Finite Differences and Their Applications

## 2.1 مقدمة :

كلما قادت مسألة فنية الى معادلة تفاضلية لايمكن حلها بشكل مغلق ( closed form ) وجب استخدام الطرق العددية التقريبية في الحل . وقد تستند هذه ، مثلا ، على مفكوك المتواليات أو تكون طرقا عددية صرفة تقود الى تقييم المتكاملات المجهولة في نقاط معينة من فترة التعريف بوسائط حسابية بسيطة . كذلك يمكن حل مسائل القيم الابتدائية والحدودية التي تشمل معادلات تفاضلية اعتيادية أو جزئية ، بهذه الطرق . ان هذه الحلول العددية لاتسمح عادة بايجاد القوانين الفيزياوية العامة ولكنها تؤشر اعتماد المتغيرات المعنية على الوسائط المختلفة للمعادلة ، وخاصة اذا ماكتبت المعادلات بشكل لابعدي none dimensional

لقد اصبحت الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية شائعة في الآونة الاخيرة لان المسائل الفنية الحديثة تقود الى معادلات معقدة نادرة الحل بحدود منتهية ولان الآلات الحاسبة والحاسبات الالكترونية قد اصبحت واسعة الانتشار . وكذلك فان للطرق العددية ميزة تسمح بأن يقوم من ليست لهم معرفة بالرياضيات العليا أوالفيزياء باداء العمل الفعلي . مما يوفر جهود المتخصصين .

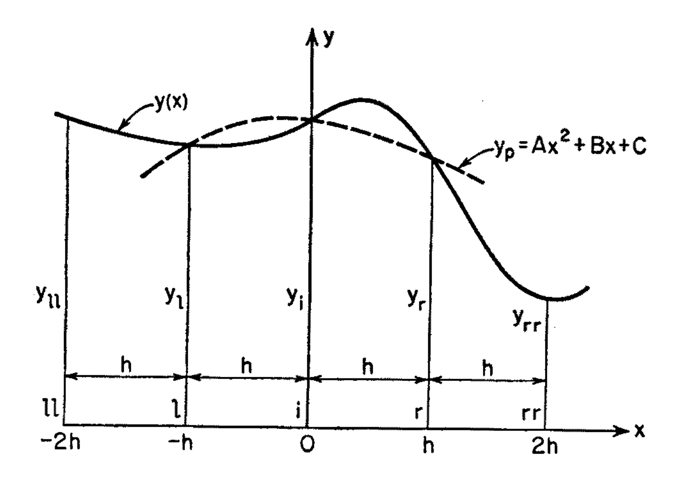
ان حلول المعادلات التفاضلية بالطرق العددية تتكون اساسا من ايجاد القيم العددية للتكاملات المجهولة عند نقاط ارتكازمتراصة على المحور $x$ للمعادلات التفاضلية الاعتيادية ، وفي المستوى $x\,y$ للمعادلات التفاضلية الجزئية ثنائية البعد . للحصول على قيم المرتكزات ( *pivotal values* ) للتكامل ، يتم تقريب مشتقات $f$ الواردة في المعادلة التفاضلية بمشتقات قطوع مكافئة ( parabolas ) من الدرجة $n$ التي تمر خلال عدد معين من نقاط الارتكاز ، أو بمفكوك متسلسلة تيلر للدالة المجهولة $f$ ، كما مبين في البنود التالية.

## 2.2 معادلات التفاضل باستكمال قطوع مكافئة :

***Differentiation Formulas by Interpolating Parabolas***

ان أبسط طريقة للحصول على تعابير تقريبية لمشتقات الدالة $y(x)$ ، المعطاة تخطيطيا أو بواسطة جدول قيم بعض نقاط ارتكاز $i$ ، تتكون من استبدال ( أوالتعويض ) عن الدالة $y$

بقطع مكافىء يمر في عدد من نقاط الارتكاز ، ومن ثم أخذ مشتقات القطع المكافىء كقيم تقريبية لمشتقات الدالة $y$ .




شكل (١-٢) ( قطع مكافيء الاستكمال )

فمثلا ، لايجاد المشتقة الثانية $y''$ للدالة عندما تكون $y$ معلومة في ثلاث نقاط ارتكاز متوالية $r, i, l$ ذات فواصل (spacing) منتظمة $h$ على محور $x$ ، ندعو قيم المرتكزات المناظرة $y_r, y_i, y_l$ ( الشكل 2.1 )* ثم نمرر قطعا مكافئا من الدرجة الثانية

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

في هذه النقاط . باختيار نقطة الاصل عند الاحداثي الصادى للنقطة $i$ ، للسهولة ودون فقدان العمومية ، نحصل على :

$$y(-h) = y_l = Ah^2 - Bh + C$$
$$y(0) = y_i = C$$
$$y(h) = y_r = Ah^2 + Bh + C,$$

ومن هذه المعادلات نحصل على

$$y_l - 2y_i + y_r = 2Ah^2.$$

* ان الرقم $i$ عند اسفل $y$ يدل على ان المشتقة حسبت عند نقطة ارتكاز $i$ ، بينما $l$ او $r$ يدلنا على نقاط الارتكاز الواقعة على اليسار واليمين من $i$ على التناظر .

وحيث ان المشتقة الثانية $y''$ للقطع المكافىء (a) تساوي $2A$
لذلك فان المشتقة الثانية $y_i''$ للدالة $y$ عند $i$ تقرب بالمعادلة

$$y_i'' = \frac{1}{h^2}(y_l - 2y_i + y_r). \qquad (2.2.1)$$

ويمكن الحصول على تعابير مماثلة لمشتقات اعلى درجة باستكمال قطوع مكافئة من درجة اعلى تمرر في نقاط ارتكاز متناظرة اوغير متناظرة الموقع بالنسبة للنقطة $i$ . وهكذا . بامرار القطع المكافىء ، التكعيبي .

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \qquad (b)$$

في النقاط $r, i, l$ والنقطة $rr$ الواقعة الى يمين $r$ ( شكل 2.1 ) . واختيار الاصل عند $i$ ثانية ، نحصل على :

$$y(-h) = y_l = -Ah^3 + Bh^2 - Ch + D;$$
$$y(0) = y_i = D;$$
$$y(h) = y_r = Ah^3 + Bh^2 + Ch + D;$$
$$y(2h) = y_{rr} = 8Ah^3 + 4Bh^2 + 2Ch + D.$$

بحذف $D, C, B$ بين هذه المعادلات نحصل على القيمة $6A$ للمشتقة الثالثة للقطع المكافىء (b) وعليه يكون تقريب $y_i'''$ غير المتناظر

$$y_i''' = \frac{1}{h^3}(-y_l + 3y_i - 3y_r + y_{rr}). \qquad (2.2.2)$$

لقد وفر ساوثويل في كتابة طرق الارخاء في الفيزياء النظرية* قائمة بمثل هذه الصيغ لنقاط منتظمة التباعد ( التوزيع ) ، تحت اسم بيكلي *Bickley's formulas*

من الممكن اشتقاق صيغ مماثلة عندما لاتتوزع نقاط الارتكاز بصورة منتظمة فصيغة المشتقة الثانية مثلا ، عند $i$ لدالة معلومة في ثلاث نقاط موزعة على مسافات $\alpha h, h$ على التناظر ( الشكل 2.2 ) تقتنى بواسطة معادلة قطع مكافىء من الدرجة الثانية يمر في هذه النقاط الثلاثة

* كتاب ساوثويل المسمى طرق الارخاء في الفيزياء النظرية المطبوع في مطبعة اوكسفورد لندن سنة ١٩٤٦

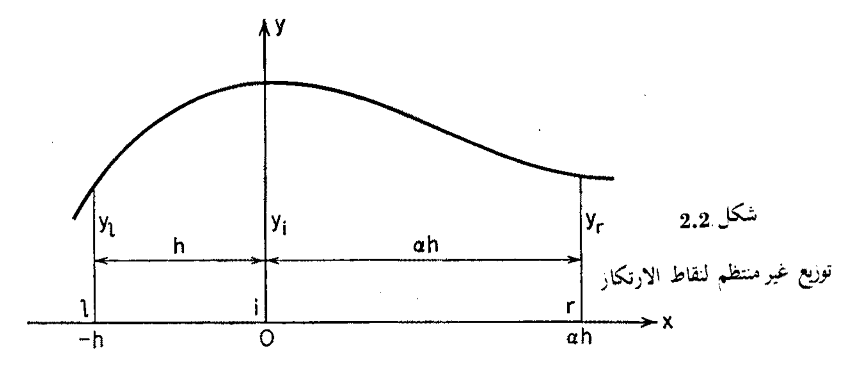
* R. V. Southwell, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Oxford University Press, London, 1946.

$$y(-h) = y_l = Ah^2 - Bh + C;$$
$$y(0) = y_i = C;$$
$$y(\alpha h) = y_r = \alpha^2 Ah^2 + \alpha Bh + C.$$

بحذف الثوابت $C, B$ فالمشتقة $2A$ للقطع المكافىء بدلالة $y_r$ , $y_l$, $y_i$ تكون

$$y_i'' = \frac{1}{h^2}\frac{2}{\alpha(\alpha+1)}[\alpha y_l - (1+\alpha)y_i + y_r], \qquad (2.2.3)$$

التي تتطابق مع المعادلة ( 2.2.1 ) عند $\alpha = 1$




شكل 2.2

توزيع غير منتظم لنقاط الارتكاز

## 2.3 صيغ التفاضل بطريقة فتح الدوال بمفكوك متسلسلة تيلر

***Differentiation Formulas by Taylor Series Expansions***

من الواضح انه بينما تكون بعض الاخطاء متأصلة في بعض انواع المعادلات من نوع ( 2.2.1 ) ( 2.2.2 ) ( 2.2.3 ) فان هذا الخطأ يتلاشى كلما اخذنا الفاصل $h$ اصغر فاصغر . ولمعرفة كيف ان هذا الخطأ يعتمد على $h$ نرى انه من الملائم اعادة اشتقاق هذه الصيغ باستخدام مفكوك تيلر .

ان مفكوك تيلر للمقدار $y(x+h)$ حول $x$ هو*

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x), \qquad (2.3.1)$$

حيث $y^{(n)}$ تعني $d^n y/dx^n$ وان $y^{(0)}(x)$ تعني $y(x)$ وان $0! = 1$

بتطبيق المعادلة ( 2.3.1 ) باستخدام رموز الشكل ( 2.2 ) نحصل على المفكوكات عند

* انظر على سبيل المثال كتاب المسائل الهندسية صفحة 167

$x + \alpha h$ at $x - h$:

$$y_r = y_i + \alpha h y_i' + \frac{\alpha^2 h^2}{2} y_i'' + \frac{\alpha^3 h^3}{6} y_i''' + \frac{\alpha^4 h^4}{24} y_i^{iv} + \dots$$
$$y_l = y_i - h y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' - \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{24} y_i^{iv} - \dots . \qquad (2.3.2)$$

نحصل مباشرة على $y'$ التقريبي بالطرح

$$y_r - y_l = (\alpha + 1) h y_i' + (\alpha^2 - 1) \frac{h^2}{2} y_i'' + (\alpha^3 + 1) \frac{h^3}{6} y_i''' + \dots .$$

ومنها نحصل على

$$y_i' = \frac{1}{(\alpha + 1)h} (y_r - y_l) + (1 - \alpha) \frac{h}{2} y_i'' - \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha} \frac{h^2}{6} y_i''' + \dots .$$

وهذه النتيجة تشير الى ان تقريب اول مشتقة

$$y_i' = \frac{1}{(\alpha + 1)h} (y_r - y_l) \qquad (2.3.3)$$

وبخطأ قدره

$$(1 - \alpha) \frac{h}{2} y_i'' - \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha} \frac{h^2}{6} y_i''' + \dots,$$

وهذا الخطأ يقترب من الصفر بسرعة اقتراب $h$ منه اذا كانت $\alpha \neq 1$ وبسرعة اقتراب $h^2$ اذا كانت $\alpha = 1$ اي في حالة كون نقاط الارتكاز منتظمة الفواصل ، وبالمثل نحصل على تغير $y_i'$ بحذف $y_i''$ من معادلتي ( 2.3.2 ) .

$$y_i' = \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)h} [y_r - (1 - \alpha^2) y_i - \alpha^2 y_l], \qquad (2.3.4)$$

والتي يقترب الخطأ فيها من الصفر بسرعة اقتراب $h^2$ مهما كانت قيمة $\alpha$ وتصبح المعادلة (2.3.4) مطابقة للمعادلة . (2.3.3) في حالة $\alpha = 1$

بحذف $y_i'$ من معادلتي (2.3.2) نحصل على تعبير للمقدار $y_i''$

$$y_i'' = \frac{1}{h^2} \frac{2}{\alpha(\alpha + 1)} [\alpha y_l - (1 + \alpha) y_i + y_r] + (1 - \alpha) \frac{h}{3} y_i'''$$
$$- \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha} \frac{h^2}{12} y_i^{iv} + \dots, \qquad (2.3.5)$$

الذي يبين ان الخطأ في $y''_i$ الوارد في (2.2.3) يقترب من الصفر بسرعة $h$ عندما تكون $\alpha \neq 1$ بسرعة $h^2$ عندما تكون $\alpha = 1$

ويمكن الحصول على ضروب من المعادلات بهذه الطريقة كما يمكن حساب خطئها بسهولة .

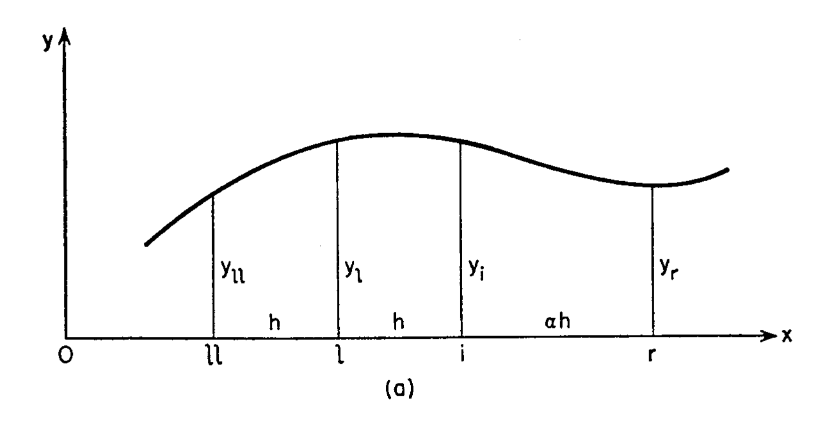
ويستطيع القارىء ان يبرهن ، مثلا ، على ان الخطأ في قيمة $y''_i$ التقريبية المحسوبة بفاصل

$$y''_i = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)h^2}[\alpha(\alpha^2-1)y_{ll} - 2(\alpha^3-4\alpha)y_l + (\alpha^3-7\alpha-6)y_i + 6y_r], \quad (2.3.6)$$

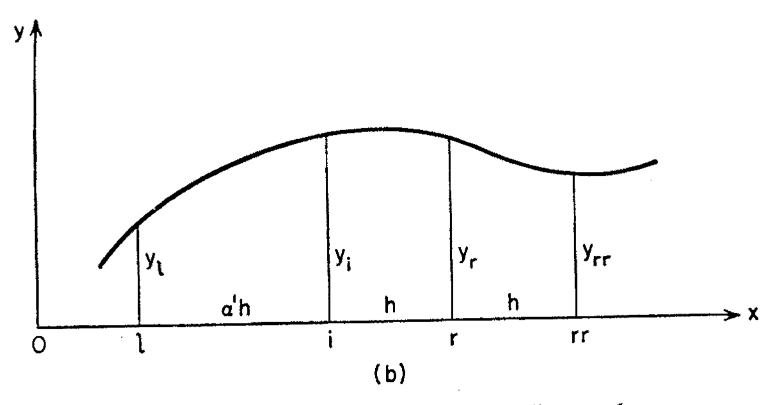
منتظم $h$ بين $l, ll$ وبين و $l, i$ وبفاصل $\alpha h$ بين $i$ $r$ ( الشكل 2.3a ) يقترب من الصفر بسرعة اقتراب $h^2$ منه . ان المعادلة النظيرة لنقاط الشكل ( 2.3b ) هي :

$$y''_i = \frac{1}{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2)h^2}[6y_l + (\alpha'^3-7\alpha'-6)y_i - 2(\alpha'^3-4\alpha')y_r + \alpha'(\alpha'^2-1)y_{rr}] \quad (2.3.7)$$

ويقترب خطؤها هي الاخرى من الصفر بسرعة اقتراب $h^2$



(a)




**شكل (٢-٣)** مسافات غير متساوية بين النقاط

كلما كانت نقاط الارتكاز منتظمة الفواصل ، امكن تطبيق طريقة متسلسلة تيلر رمزيا بالاقتران مع فكرة الفروق التي تلعب دورا كبير الاهمية في كل الحسابات العددية . وبهذه الطريقة يمكن حساب ضروب عديدة من التقريبات العملية للمشتقات والاخطاء المناظرة بطريقة اقتصادية كما هو مبين في البند التالي :

## 2.4 الفروق الخلفية [ التراجعية) *Backward Differences*

لنفرض انه اعطيت القيم التالية

$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{ll}, y_l, y_i, y_r, y_{rr}, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$

لدالة $y(x)$ عند نقاط ارتكاز منتظمة الفواصل $h$ ضمن فترة التعريف ، اننا نقصد بفرق $y$ التراجعي الاول عند $i$

$$\nabla y_i \equiv y_i - y_l.^* \qquad (2.4.1)$$

كما ان الفرق التراجعي الثاني عند $i$ هو الفرق بين الفروق الاولى ويعطي بما يلي

$$\nabla(\nabla y_i) \equiv \nabla^2 y_i = (y_i - y_l) - (y_l - y_{ll})$$

$$= y_i - 2y_l + y_{ll}. \qquad (2.4.2)$$

وبالمثل فان الفرق النوني $n$ هو الفرق بين الفروق من درجة $(n - 1)$ أي

$$\nabla^n y_i \equiv \nabla(\nabla^{n-1} y_i).$$

---

* دلتا الاغريقية المقلوبة [ ∇ ] تستخدم للدلالة على الفروق التراجعية بينما دلتا الاعتيادية تستخدم للدلالة ( Δ ) على الفروق الامامية والرمز δ يدل على الفروق المركزية .

من السهل اثبات كون معاملات قيم المرتكزات للفرق $n$ هي نفس معاملات مفكوك ذى الحدين ( binomial ) $(a-b)^n$ مثلا

$$\nabla^3 y_i = y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}; \qquad (2.4.3)$$

$$\nabla^4 y_i = y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4}. \qquad (2.4.4)$$

لقد بوبت الفروق الخلفية المتعاقبة في جدول 2.1

| $i$ | $y_i$ | $\nabla y_i$ | $\nabla^2 y_i$ | $\nabla^3 y_i$ | $\nabla^4 y_i$ | $\nabla^5 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $y_0$ | | | | | |
| 1 | $y_1$ | $\nabla y_1$ | | | | |
| 2 | $y_2$ | $\nabla y_2$ | $\nabla^2 y_2$ | | | |
| 3 | $y_3$ | $\nabla y_3$ | $\nabla^2 y_3$ | $\nabla^3 y_3$ | | |
| 4 | $y_4$ | $\nabla y_4$ | $\nabla^2 y_4$ | $\nabla^3 y_4$ | $\nabla^4 y_4$ | |
| 5 | $y_5$ | $\nabla y_5$ | $\nabla^2 y_5$ | $\nabla^3 y_5$ | $\nabla^4 y_5$ | $\nabla^5 y_5$ |

جدول ١ - ٢- الفروق التراجعية أي الخلفية

من المعلوم(*) انه يمكن استخدام مؤشر التفاضلي $D \equiv d/dx$ رمزيا كرقم لانه يخضع لقوانين الجبر الاساسية . كذلك يمكن استخدام مؤثر الفروق $\nabla$ رمزيا كرقم ( او متغير) للسبب نفسه . كما هو مبين بالمتطابقات التالية

$$\nabla(y_i + y_j) = \nabla y_i + \nabla y_j = \nabla y_j + \nabla y_i;$$

$$\nabla(cy_i) = c\nabla y_i;$$

$$\nabla^m(\nabla^n y_i) = \nabla^{m+n} y_i.$$

من الممكن . باستعمال هذه الخواص . التعبير عن فروقات الدالة $y$ بدلالة المشتقات المتتالية كما ان العكس ممكن بحيث يعبر عن المشتقات بدلالة الفروقات وان اشتقاق هذه التعابير بطريقة الرموز يحمل كفاءة عالية .

مثلا ان مفكوك تيلر للدالة $y(x+h)$ حول $x$ هو

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \ldots, \qquad (a)$$

(*) انظر أي كتاب في المعادلات التفاضلية اوكتاب -

E. Stephens. The Elementary theory of operational Mathematics Mc- Graw- Hill company- Inc-. New York, 1937.

فعند استخدام $D$ وقواها للدلالة على مشتقات $y$ تصبح

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!} Dy(x) + \frac{h^2}{2!} D^2y(x) + \frac{h^3}{3!} D^3y(x) + \ldots$$

$$= \left(1 + \frac{h}{1!} D + \frac{h^2}{2!} D^2 + \frac{h^3}{3!} D^3 + \ldots\right) y(x). \qquad \text{(b)}$$

باستخدام المتسلسلتين الأسيتين لكل من $e^{\pm x}$

$$e^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

يمكن كتابة المؤثر التفاضلي في الطرف الايمن من المعادلة (b) رمزيا كالتالي :

$$1 + \frac{hD}{1!} + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \ldots = e^{hD}, \qquad (2.4.5)$$

وعليه يمكن كتابة $y(x+h)$ هي الاخرى رمزيا بالشكل التالي :

$$y(x+h) = e^{hD}y(x). \qquad (2.4.6)$$

بوضع $x_i$ بدل $x$ و $y_r$ بدل $y(x_i+h)$ بدل $y_i$, $y(x_i)$ تصبح المعادلة السابقة

$$y_r = e^{hD}y_i. \qquad (2.4.7)$$

بالمثل . بوضع $-h$ بدل $h$ في المعادلة (2.4.6) تصبح

$$y(x-h) = e^{-hD}y(x) \qquad (2.4.8)$$

وكالسابق بجعل $y(x) = y_i$ , $y_l = y(x_i - h)$ نحصل على

$$y_l = e^{-hD}y_i. \qquad (2.4.9)$$

يمكن الان كتابة الفرق التراجعي الاول $\nabla y_i$ [ في المعادلة (2.4.1) ] بواسطة المعادلة (2.4.9) كالتالي :

$$\nabla y_i = y_i - y_l = [1 - e^{-hD}]y_i \qquad (2.4.10)$$

او باستخدام المعادلة (2.4.5)

$$\nabla y_i = \left[\frac{hD}{1!} - \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} - \frac{h^4D^4}{4!} + \dots\right] y_i$$
$$= \left[1 - \frac{hD}{2} + \frac{h^2D^2}{6} - \frac{h^3D^3}{24} + \dots\right] hDy_i. \qquad (2.4.11)$$

تعطي المعادلة (2.4.11) مفكوك $\nabla y_i$ بمتسلسلة لانهائية في جميع مشتقات $y$ عند $i$ اذا ماكتبت المعادلة (2.4.10) بصيغة تأثيرية ( operational ) صرفة ، باسقاط $y_i$ من طرفي المعادله

$$\nabla = 1 - e^{-hD}, \qquad (2.4.12)$$

فان من الممكن استخدام «قواها» لتقييم مفكوك المتسلسلات للفروق المتعاقبة لاية دالة. وهكذا، بتربيع المعادلة (2.4.12) واستخدام المعادلة (2.4.5) يمكن الحصول على الفرق $\nabla^2$ بالشكل التالي :

$$\nabla^2 = (1 - e^{-hD})^2 = (1 + e^{-2hD} - 2e^{-hD})$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{2hD}{1!} + \frac{4h^2D^2}{2!} - \frac{8h^3D^3}{3!} + \frac{16h^4D^4}{4!} - \dots\right)$$
$$-2\left(1 - \frac{hD}{1!} + \frac{h^2D^2}{2!} - \frac{h^3D^3}{3!} + \frac{h^4D^4}{4!} - \dots\right)$$
$$\nabla^2 = h^2D^2 - h^3D^3 + \tfrac{7}{12}h^4D^4 - \dots. \qquad (2.4.13)$$

بالمثل بتكعيب المعادلة (2.4.12) او ضرب المعادلة (2.4.12) بالمعادله (2.4.13) نحصل على :

$$\nabla^3 = h^3D^3 - \tfrac{3}{2}h^4D^4 + \tfrac{5}{4}h^5D^5 - \dots, \qquad (2.4.14)$$

بينما تعطي قوى المعادلة (2.4.12) الاعلى مفكوكات $\nabla^n y_i$ بدلالة مشتقات $y$ عند $i$ .
وعلى العكس لايجاد مشتقات $y$ بدلالة الفروق ، تحل المعادلة (2.4.12) للمقدار $e^{-hD}$

$$e^{-hD} = 1 - \nabla, \qquad (2.4.15)$$

ثم بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة نحصل على

$$\ln e^{-hD} = -hD = \ln(1-\nabla) = -\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots\right).^*$$

وعليه فان مفكوك المشتقة الاول $D$ بمتسلسلة فروق لانهائية هو

$$hD = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots. \qquad (2.4.16)$$

وبأخذ القوى المتعاقبة للمعادلة(2.4.16) نحصل على تعابير لمشتقات اعلى بدلالة الفروق

$$\begin{aligned} h^2D^2 &= \nabla^2 + \nabla^3 + \tfrac{11}{12}\nabla^4 + \tfrac{5}{6}\nabla^5 + \dots; \\ h^3D^3 &= \nabla^3 + \tfrac{3}{2}\nabla^4 + \tfrac{7}{4}\nabla^5 + \dots; \\ h^4D^4 &= \nabla^4 + 2\nabla^5 + \tfrac{17}{6}\nabla^6 + \dots; \\ h^5D^5 &= \nabla^5 + \tfrac{5}{2}\nabla^6 + \tfrac{25}{6}\nabla^7 + \dots. \end{aligned} \qquad (2.4.17)$$

ان مفكوكات الفروق ,(2.4.11) ,(2.4.12) ,(2.4.13) ,(2.4.14) ,(2.4.16) ,(2.4.17) تجيز الاشتقاق البسيط لمعادلات التفاضل وحيدة الجانب (*unilateral differentiation*) واخطائها .

مثلاً بحل المعادلات (2.4.11), (2.4.13) (2.4.14) لقيمة $D^3, D^2, D$ على التوالي نحصل على

$$\begin{aligned} D &= \frac{\nabla}{h} + \frac{hD^2}{2} - \frac{h^2D^3}{6} + \frac{h^3D^4}{24} - \dots, \\ D^2 &= \frac{\nabla^2}{h^2} + hD^3 - \frac{7h^2D^4}{12} + \dots, \\ D^3 &= \frac{\nabla^3}{h^3} + \frac{3hD^4}{2} - \frac{5h^2D^5}{4} + \dots, \end{aligned} \qquad (2.4.18)$$

---

* ان المتسلسلة الاسية لمفكوك $\ln(1 \pm x)$ هي

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \dots.$$

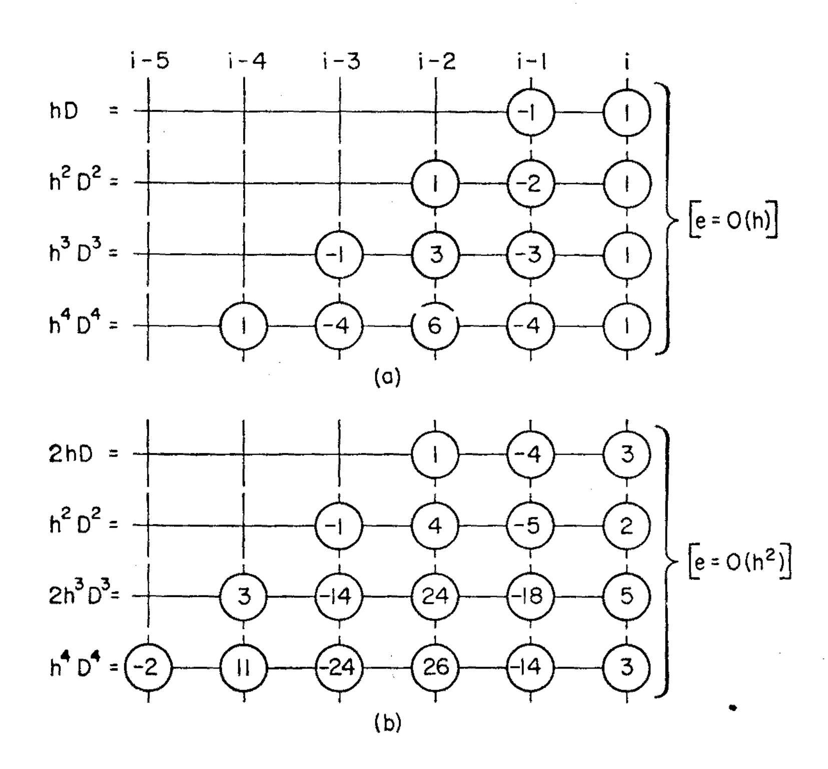
بأخذ الحد الاول فقط من كل متسلسلة . نحصل على :

$$Dy_i = \frac{1}{h}(y_i - y_I) + 0(h),$$

$$D^2y_i = \frac{1}{h^2}(y_i - 2y_I + y_{II}) + 0(h), \qquad (2.4.19)$$

$$D^3y_i = \frac{1}{h^3}(y_i - 3y_I + 3y_{II} - y_{III}) + 0(h),$$

حيث الرمز $0(h)$ يعني « خطا من رتبة "$h$" » ويساوي مجموع الحدود المهملة في المعادلة . (2.4.18)




شكل (٢ -٤ ) مؤثرات الفروق الخلفية ( التراجعية )

وبالمثل . يمكن اثبات ان تقريب المشتقة $n$ بالحد الاول من مفكوك الفروقات التراجعية فيه خطأ من رتبة $h$

وللحصول على معادلات ذات خطأ من رتبة $h^2$ يجب استعمال الحدين الاولين من مفكوك المشتقة . وهكذا . بحذف $h^2D^2$ من المعادلتين (2.4.11) ,(2.4.13) نحصل على

$$\nabla + \frac{\nabla^2}{2} = hD - \tfrac{1}{3}h^3D^3 + \ldots$$

او بالمعادلتين (2.4.1) ,(2.4.2)

$$Dy_i = \frac{1}{2h}(3y_i - 4y_l + y_{ll}) + 0(h^2). \qquad (2.4.20)$$

وبالمثل . بجمع المعادلتين (2.4.13) ,(2.4.14) نحصل على

$$\nabla^2 + \nabla^3 = h^2D^2 - \tfrac{11}{12}h^4D^4 + \ldots$$

او بالمعادلتين (2.4.2) ,(2.4.3) نحصل على

$$D^2y_i = \frac{1}{h^2}(2y_i - 5y_l + 4y_{ll} - y_{lll}) + 0(h^2). \qquad (2.4.21)$$

وعلى العموم . لو اخذت اول $m$ من حدود مفكوك المشتقات في فروق تراجعية بنظر الاعتبار فان المعادلة المرادفة تكون ذات خطأ من رتبة $h^m$

ان الجزيئات الرياضية "mathematical molecules" في الشكل 2.4 تعبر عن المشتقات الأكثر شيوعاً بدلالة الفروق التراجعية مع رتبة الاخطاء المرادفة .

## 2.5 الفروق الامامية *Forward Differences*

كما ان الفروق الخلفية تعرف بدلالة نقاط كلها على يسار $i$ . كذلك فان الفروق الامامية تعرف بدلالة نقاط على يمين $i$ .

ان تعريف فرق $y$ الامامي الاول هو :

$$\Delta y_i \equiv y_r - y_i \qquad (2.5.1)$$

ويمكن كتابته رمزياً بواسطة المعادلة (2.4.7)

$$\Delta = e^{hD} - 1. \qquad (2.5.2)$$

وللفروقات الامامية المتعاقبة

$$\Delta^2 y_i = y_{rr} - 2y_r + y_i,$$
$$\Delta^3 y_i = y_{rrr} - 3y_{rr} + 3y_r - y_i, \qquad (2.5.3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

معاملات مرتكزات مساوية لمعاملات مفكوك ذي الحدين $(a - b)^n$ وهي مرتبة في الجدول 2.2

| $i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ | $\Delta^4 y_i$ | $\Delta^5 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $y_0$ | $\Delta y_0$ | $\Delta^2 y_0$ | $\Delta^3 y_0$ | $\Delta^4 y_0$ | $\Delta^5 y_0$ |
| 1 | $y_1$ | $\Delta y_1$ | $\Delta^2 y_1$ | $\Delta^3 y_1$ | $\Delta^4 y_1$ | |
| 2 | $y_2$ | $\Delta y_2$ | $\Delta^2 y_2$ | $\Delta^3 y_2$ | | |
| 3 | $y_3$ | $\Delta y_3$ | $\Delta^2 y_3$ | | | |
| 4 | $y_4$ | $\Delta y_4$ | | | | |
| 5 | $y_5$ | | | | | |

جدول ( ٢-٢ ) جدول الفروق الامامية

لاجل فك مشتقات الدالة بدلالة الفروق الامامية تحل المعادلة (2.5.2) لقيمة $e^{hD}$ ثم يؤخذ لوغاريتم الطرفين *

$$hD = \ln (1 + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots . \qquad (2.5.4)$$

بأخذ قوى هذه المعادلة نحصل على :

$$\begin{aligned} h^2D^2 &= \Delta^2 - \Delta^3 + \tfrac{11}{12}\Delta^4 - \tfrac{5}{6}\Delta^5 + \ldots ; \\ h^3D^3 &= \Delta^3 - \tfrac{3}{2}\Delta^4 + \tfrac{7}{4}\Delta^5 - \ldots ; \\ h^4D^4 &= \Delta^4 - 2\Delta^5 + \tfrac{17}{6}\Delta^6 - \ldots ; \\ h^5D^5 &= \Delta^5 - \tfrac{5}{2}\Delta^6 + \tfrac{25}{6}\Delta^7 - \ldots . \end{aligned} \qquad (2.5.5)$$

وبالعكس بفتح المعادلة (2.5.2) نحصل على :

$$\Delta = hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \frac{h^4D^4}{4!} + \ldots , \qquad (2.5.6)$$

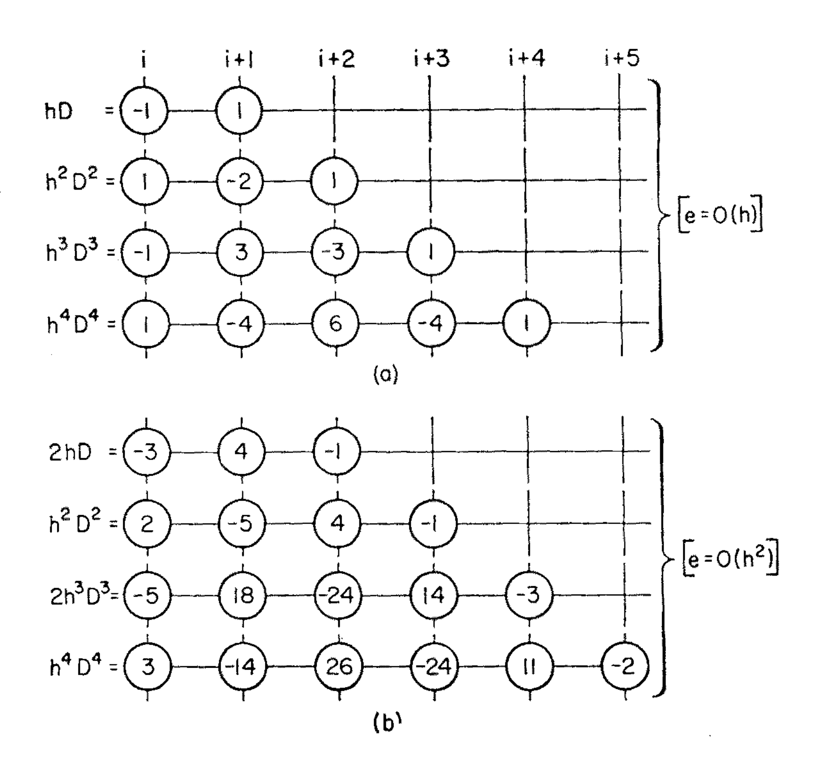
وبأخذ قوى $\Delta$ ، نحصل منها على :

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= h^2D^2 + h^3D^3 + \tfrac{7}{12}h^4D^4 + \ldots ; \\ \Delta^3 &= h^3D^3 + \tfrac{3}{2}h^4D^4 + \tfrac{5}{4}h^5D^5 + \ldots ; \end{aligned} \qquad (2.5.7)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

من الممكن اثبات كون الخطأ في مفكوك المشتقة بدلالة الفروق الامامية [ المعادلات (2.5.4) و(2.5.5) ] والتي تحتوي على $m$ من الحدود يكون من رتبة $h^m$ .

تعطي الجزئيات الرياضية في الشكل 2.5 تعابير المشتقات الشائعة بدلالة الفروق الامامية مع رتبة الاخطاء المناظرة لها في المشتقات




شكل ٢.٥ : مؤثرات الفروق الأمامية

## 2.6 صيغ الاستكمال لكريكورى – نيوتن

***Gregory-Newton Interpolation Formulas***

في المسائل الهندسية توجد صيغتان مهمتان في الاستكمال من السهل ايجادهما بطريقة الفروق الخلفية وطريقة الفروق الامامية للدالة .

لنفرض ان قيم دالة ما . قابلة للفك بمتسلسلة تيلر . معلومة عند نقاط الارتكاز في فترة تعريفها وان هذه النقاط منتظمة التباعد $h$ . وان $a$ هو الاحداثي السيني للنقطة التي نرغب

ايجاد قيمة الدالة عندها هو $a \pm xh$ حيث $x$ أي عدد حقيقي . بفك $y(a \pm xh)$ بمتسلسلة تيلر حول النقطة a ينتج :

$$y(a \pm xh) = y(a) \pm xhy'(a) + \frac{x^2h^2}{2} y''(a) \pm \frac{x^3h^3}{6} y'''(a) + \dots \quad \text{(a)}$$

ان صيغة كريكوري – نيوتن للاستكمال الامامي تنتج بتعويض الفروقات الامامية المعطاة بالمعادلة (2.5.4) والمعادلة (2.5.5) ، بدل مشتقات الدالة $y$ عند $a$ في مفكوك $y(a + xh)$ . وبالتعويض في مفكوك $y(a - xh)$ عن مشتقات $y$ عند $a$ بدلالة الفروق التراجعية المعطاة بالمعادلة (2.4.16) والمعادلة (2.4.17) نحصل على صيغة كريكوري – نيوتن للاستكمال التراجعي . ويمكن انجاز هذه التعويضات ، وللقارىء ان يتحقق من ذلك مباشرة ، بالطرق الرمزية :
من المعادلة (2.5.2)

$$e^{hD} = 1 + \Delta$$

بوضع a بدل $x$ في المعادلة (2.4.6) ووضع $xh$ بدل $h$ فيها نحصل :

$$y(a + xh) = e^{xhD}y(a) = (e^{hD})^x y(a), \quad \text{(b)}$$

وعليه فانه يمكن كتابة مفكوك المعادلة (a) رمزيا :

$$y(a + xh) = (1 + \Delta)^x y(a).$$

ان مفكوك ذي الحدين $(1 + \Delta)^x$ في هذه المعادلة يعطي صيغة الاستكمال الامامي :

$$y(a + xh) = \left[1 + x\Delta + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 + \dots\right] y(a). \quad (2.6.1)$$

وبالمثل بالنسبة للمعادلة (2.4.12)
كذلك اذا ماعوضنا $a$ بدل $x$ ، $xh$ بدل $h$ في المعادلة (2.4.8)

$$y(a - xh) = e^{-xhD}y(a) = (e^{-hD})^x y(a),$$

ويكتب مفكوك $y(a - xh)$ في المعادلة (a) رمزيا

$$y(a - xh) = (1 - \nabla)^x y(a).$$

كما ان مفكوك ذي الحدين للمقدار $(1 - \nabla)^x$ يعطي صيغة الاستكمال التراجعي

$$y(a - xh) = \Big[1 - x\nabla + \frac{x(x-1)}{2!}\nabla^2 - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\nabla^3 + \dots\Big] y(a). \quad (2.6.2)$$

مثلا لو اعطينا قيم $y = \sin\theta$ لقيم* $\theta = 10°(1°)13°$ فان قيمة $\sin\theta$ عند $10°20'$ تحسب كما مبين في جدول 2.3 بالفروق الامامية ، بكون

$xh = (20') = \frac{1}{3}°$ $\quad a = 10°$

| $i$ | $\theta_i^0$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0.17365 | 0.01716 | −0.00006 | 0 |
| 1 | 11 | 0.19081 | 0.01710 | −0.00006 | |
| 2 | 12 | 0.20791 | 0.01704 | | |
| 3 | 13 | 0.22495 | | | |

جدول ( ٢-٣ )

$$\sin 10°20' = 0.17365 + \frac{\frac{1}{3}}{1}(0.01716) + \frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{2}(-0.00006) + \frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{6}(0) = 0.17938.$$

واننا نحصل على نفس القيمة باستخدام الفروق التراجعية التي ناخذ فيها $a = 13°$ ، $xh\ (= 2°40') = \frac{8}{3}°$ كما مبين بجدول 2.4

$$\sin 10°20' = 0.22495 - \frac{\frac{8}{3}}{1}(0.01704) + \frac{(\frac{8}{3})(\frac{5}{3})}{2}(-0.00006) - \frac{(\frac{8}{3})(\frac{5}{3})(\frac{2}{3})}{6}(0) = 0.17938.$$

(*) الرمز $\theta = a(h)b$ يقوم مقام قيم $\theta$ من $a$ الى $b$ بفترات $h$

| $i$ | $\theta_i^0$ | $y_i$ | $\nabla y_i$ | $\nabla^2 y_i$ | $\nabla^3 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0.17365 | | | |
| 1 | 11 | 0.19081 | 0.01716 | | |
| 2 | 12 | 0.20791 | 0.01710 | −0.00006 | |
| 3 | 13 | 0.22495 | 0.01704 | −0.00006 | 0 |

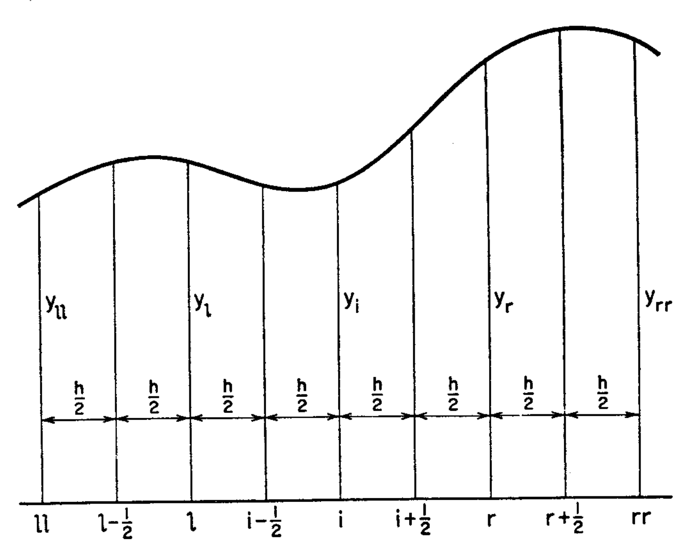
جدول **2.4**

ان قيمة $\sin 10°20'$ الحقيقية هي 0.17937

من الممكن استخدام صيغة كريكوري – نيوتن لاستيفاء القيم خارج الفترة التي تكون فيها $y$ معلومة . فمثلا ، بواسطة الجدول 2.3 نحسب قيمة $\sin 13°30'$ وبأخذ $a = 10°$ ، $xh = (3°30') = 3.5°$ في المعادلة (2.6.1)

$$\sin 13°30' = 0.17365 + (3.5)(0.01716) + \frac{(3.5)(2.5)}{2}(-0.00006)$$
$$= 0.23345.$$

وهذه القيمة صحيحة لاخر رقم حسب




شكل ( ٦-٢ ) نقاط الارتكاز للفروق المركزية central differences.

## 2.7 الفروق المركزية *Central Differences*

لقد تبين في البندين 2.4 ، 2.5 ان الفروق التراجعية والامامية تقود الى تعابير ، وحيدة الجانب ، لمشتقات الدالة $y$ يكون الخطأ في ابسط اشكالها من مرتبة $h$

ان الفروق المركزية التي تتضمن نقاط ارتكاز متماثلة التوزيع بالنسبة للنقطة i هي ادق من الفروق التراجعية او الامامية وذات فائدة متميزة في حل مسائل القيم الحدودية .

لتكن قيم الدلة $y(x)$ معلومة عند نقاط ارتكاز $i$ منتظمة التباعد ، وللوقت الحاضر عند منتصف الفترات المحددة بنقاط الارتكاز ( الشكل 2.6 ) ان فرق $y(x)$ المركزي الاول عند i يعرف بالتالي :

$$\begin{aligned}\delta y_i &\equiv y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - y\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\\ &= y_{i+\frac12} - y_{i-\frac12}.\end{aligned} \qquad (2.7.1)$$

والفرق المركزي الثاني عند i هو الفرق بين الفروق الاولى :

$$\begin{aligned}\delta^2 y_i \equiv \delta(\delta y_i) &= [y_{(i+\frac12)+\frac12} - y_{(i-\frac12)+\frac12}] - [y_{(i+\frac12)-\frac12} - y_{(i-\frac12)-\frac12}]\\ &= y_r - 2y_i + y_l.\end{aligned}$$

كما ان الفرق ذا الرتبة n يعرف بالتالي :

$$\begin{aligned}\delta^2 y_i \equiv \delta(\delta y_i) &= [y_{(i+\frac12)+\frac12} - y_{(i-\frac12)+\frac12}] - [y_{(i+\frac12)-\frac12} - y_{(i-\frac12)-\frac12}]\\ &= y_r - 2y_i + y_l.\end{aligned} \qquad (2.7.2)$$

وهذا يقودنا الى :

$$\delta^3 y_i = y_{r+\frac12} - 3y_{i+\frac12} + 3y_{i-\frac12} - y_{l-\frac12}; \qquad (2.7.3)$$

$$\delta^4 y_i = y_{rr} - 4y_r + 6y_i - 4y_l + y_{ll}. \qquad (2.7.4)$$

ان معاملات قيم الارتكاز في الفروق المركزية هي نفس معاملات مفكوك ذي الحدين $(a-b)^n$ ان الفروق المركزية قد سطرت في جدول 2.5

**Table 2.5**
**Central Differences**

| $i$ | $y_i$ | $\delta y_i$ | $\delta^2 y_i$ | $\delta^3 y_i$ | $\delta^4 y_i$ | $\mu\delta y_i$ | $\mu\delta^3 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $y_0$ | | | | | | |
| | | $\delta y_{1/2}$ | | | | | |
| 1 | $y_1$ | | $\delta^2 y_1$ | | | $\mu\delta y_1$ | |
| | | $\delta y_{3/2}$ | | $\delta^3 y_{3/2}$ | | | |
| 2 | $y_2$ | | $\delta^2 y_2$ | | $\delta^4 y_2$ | $\mu\delta y_2$ | $\mu\delta^3 y_2$ |
| | | $\delta y_{5/2}$ | | $\delta^3 y_{5/2}$ | | | |
| 3 | $y_3$ | | $\delta^2 y_3$ | | $\delta^4 y_3$ | $\mu\delta y_3$ | $\mu\delta^3 y_3$ |
| | | $\delta y_{7/2}$ | | $\delta^3 y_{7/2}$ | | | |
| 4 | $y_4$ | | $\delta^2 y_4$ | | | $\mu\delta y_4$ | |
| | | $\delta y_{9/2}$ | | | | | |
| 5 | $y_5$ | | | | | | |

جدول ( ٥-٢ ) الفروق المركزية

ان جداول الفروق المركزية تعطي طريقة سهلة لتدقيق قيم الدالة المستخرجة بأية طريقة كانت . يظهر لنا من جدول 2.6 انه اذا اصاب قيمة الدالة عند $i$ خطأ قدره $\epsilon$ بحيث ان $y_i + \epsilon$ تظهر في الجدول بدل $y_i$ ، فان الخطأ ينتشر خلال الفروق المتعاقبة بعوامل مفكوك ذي الحدين $(a-b)^n$، اذا كانت الدالة ملساء الى حد ما ، أي أن مشتقاتها المتعاقبة تتناقص في قيمها العددية وان مشتقتها من رتبة $n$ تقترب من الصفر كلما زادت $n$ فان $\delta^n(y_i + \epsilon)$ يصبح فعلا مساويا المقدار $\delta^n\epsilon$ وعليه فحالما تصبح نسب المقادير $\delta^n y_i$ مساوية تقريبا نسب معاملات ذي الحدين ، نستطيع حساب قيمة $\epsilon$ وبالتالي قيمة $y_i$ الصحيحة .

**Table 2.6**
**Diffusion of Error in Central Difference Table**

| $i$ | $\epsilon$ | $\delta\epsilon$ | $\delta^2\epsilon$ | $\delta^3\epsilon$ | $\delta^4\epsilon$ | $\delta^5\epsilon$ | $\delta^6\epsilon$ | $\delta^7\epsilon$ | $\delta^8\epsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i-3$ | | | | | | | $\epsilon$ | | |
| | | | | | | $\epsilon$ | | $-7\epsilon$ | |
| $i-2$ | | | | | $\epsilon$ | | $-6\epsilon$ | | $28\epsilon$ |
| | | | | $\epsilon$ | | $-5\epsilon$ | | $21\epsilon$ | |
| $i-1$ | | | $\epsilon$ | | $-4\epsilon$ | | $15\epsilon$ | | $-56\epsilon$ |
| | | $\epsilon$ | | $-3\epsilon$ | | $10\epsilon$ | | $-35\epsilon$ | |
| $i$ | $\epsilon$ | | $-2\epsilon$ | | $6\epsilon$ | | $-20\epsilon$ | | $70\epsilon$ |
| | | $-\epsilon$ | | $3\epsilon$ | | $-10\epsilon$ | | $35\epsilon$ | |
| $i+1$ | | | $\epsilon$ | | $-4\epsilon$ | | $15\epsilon$ | | $-56\epsilon$ |
| | | | | $-\epsilon$ | | $5\epsilon$ | | $-21\epsilon$ | |
| $i+2$ | | | | | $\epsilon$ | | $-6\epsilon$ | | $28\epsilon$ |
| | | | | | | $-\epsilon$ | | $7\epsilon$ | |
| $i+3$ | | | | | | | $\epsilon$ | | |

جدول ( ٦-٢ ) انتشار الأخطاء في الفروق المركزية

**Table 2.7**

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\delta y_i$ | $\delta^2 y_i$ | $\delta^3 y_i$ | $\delta^4 y_i$ | $\delta^5 y_i$ | $\delta^6 y_i$ | $\delta^7 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1.00000 | | | | | | | |
| | | | 0.10517 | | | | | | |
| 2 | 0.1 | 1.10517 | | 0.01106 | | | | | |
| | | | 0.11623 | | 0.00117 | | | | |
| 3 | 0.2 | 1.22140 | | 0.01223 | | 0.08010 | | | |
| | | | 0.12846 | | 0.08127 | | −0.39993 | | |
| 4 | 0.3 | 1.34986 | | 0.09350 | | −0.31983 | | 1.19988 | |
| | | | 0.22196 | | −0.23856 | | 0.79995 | | −2.79978 |
| 5 | 0.4 | 1.57182 | | −0.14506 | | 0.48012 | | −1.59990 | |
| | | | 0.07690 | | 0.24156 | | −0.79995 | | |
| 6 | 0.5 | 1.64872 | | 0.09650 | | −0.31983 | | | |
| | | | 0.17340 | | −0.07827 | | | | |
| 7 | 0.6 | 1.82212 | | 0.01823 | | | | | |
| | | | 0.19163 | | | | | | |
| 8 | 0.7 | 2.01375 | | | | | | | |

جدول (٧-٢)

مثلا في جدول 2.7 ، الذي يحتوي على الفروق المركزية السبعة الأولى للدالة $y = e^x$ للقيم $x = 0(.1)0.7$ يلاحظ ان $\delta^3 y_i$ حول $i = 5$ لها قيم تتناسب بصورة تقريبية مع $1, -3, +3, -1$ وعليه فان

$$\epsilon + 3\epsilon + 3\epsilon + \epsilon = 8\epsilon = 0.08127 + 0.23856 + 0.24156 + 0.07827$$
$$= 0.63966;$$
$$\epsilon_5^{(3)} = 0.07996.$$

وبالمثل فان $\delta^4 y_i$ تعطي ( لاحظ ان $\delta^4 y_5$ لايمكن حسابها نتيجة للنقص الموجود بقيم الارتكاز )

$$\epsilon + 4\epsilon + 6\epsilon + 4\epsilon + 0 = 15\epsilon = 0.08010 + 0.31983 + 0.48012 + 0.31983$$
$$= 1.19988;$$
$$\epsilon_5^{(4)} = 0.07999.$$

ان قيمة $\epsilon$ المستخرجة من الفروق الخامسة والسادسة والسابعة هي

$$\epsilon_5^{(5)} = \epsilon_5^{(6)} = \epsilon_5^{(7)} = 0.07999,$$

وقيمة $y_5$ المصححة تكون

$$y_5 = 1.57182 - 0.07999 = 1.49183.$$

حيث ان أكثر من قيمة واحدة للدالة $y_i$ قد تتأثر بالأخطاء ، وحيث ان هذه الأخطاء قد

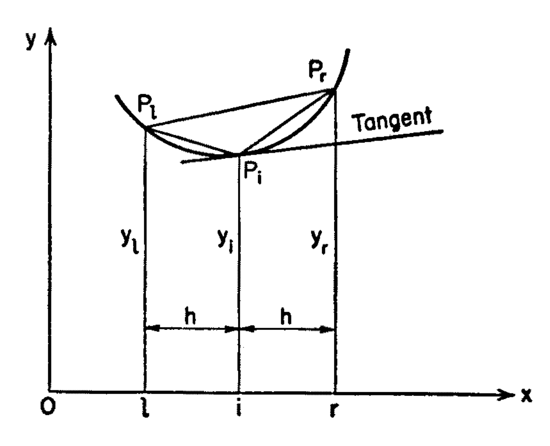
تنتشر . فان من المهم ملاحظة أن الفروق ذات الدرجات الأعلى قد تتأثر بتراكيب ( توافيق ) من الاخطاء وتصبح أقل ثقة في حساب الخطأ من الفروق ذات الدرجة الأدنى.

لأجل التخلص من قيم $y$ عند النقاط الوسطية $\ldots, l-\frac{1}{2}, i\pm\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}, \ldots$ التي تظهر في تعابير الفروق المركزية الفردية ، نعرف فروقا فردية معدلة ( موسطة ) جديدة عند $i$ على أنها متوسط الفرقين المركزيين الفرديين عند $i+\frac{1}{2}$ ، $i-\frac{1}{2}$ وبالتالي فان الفرق المتوسط الأول عند $i$ يكون

$$\tfrac{1}{2}(\delta y_{i+1/2}+\delta y_{i-1/2}) = \tfrac{1}{2}[(y_r-y_i)+(y_i-y_l)] = \tfrac{1}{2}(y_r-y_l). \qquad \text{(a)}$$

ان عملية التوسيط هذه مكافئة هندسيا لأخذ الميل عند i مساويا ميل الوتر $P_rP$ ، عوضا عن ميل الوتر $P_lP_i$ أو الوتر $P_iP_r$ ( شكل 2.7 ) . ويرمز عادة لعملية التوسيط المستعملة في الحصول على المعادلة (a) بالمؤثر $\mu$ الذي يدعى بالموسط ويعرف بما يلي :

$$\mu y_i \equiv \tfrac{1}{2}(y_{i+1/2}+y_{i-1/2}). \qquad (2.7.5)$$




شكل ( ٧-٢ ) متوسط الفرق المركزي.

وباستعمال الموسط يكون الفرق المتوسط الأول

$$\mu\delta y_i = \tfrac{1}{2}[\delta y_{i+1/2}+\delta y_{i-1/2}] = \tfrac{1}{2}(y_r-y_l). \qquad (2.7.6)$$

يرتبط المؤثران $\mu$ و $\delta$ بعلاقة بسيطة.في الواقع ، عند تربيع المؤثر $\mu$

$$\begin{aligned}\mu^2 y_i &= \mu[\tfrac{1}{2}(y_{i+1/2}+y_{i-1/2})] = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(y_r+y_i)+\tfrac{1}{2}(y_i+y_l)]\\ &= \tfrac{1}{4}(y_r+2y_i+y_l),\end{aligned}$$

وبتأثير $(1 + \delta^2/4)$ على $y_i$ نرى بالمعادلة (2.7.2) ان

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) y_i = y_i + \frac{1}{4}(y_r - 2y_i + y_l)$$
$$= \frac{1}{4}(y_r + 2y_i + y_l) = \mu^2 y_i.$$

وعليه من الممكن الكتابة بالشكل الرمزي :

$$\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}. \qquad (2.7.7)$$

**تسمح المعادلات (2.7.2) ,(2.7.6) ,(2.7.7) بأن نفتح مفكوك المشتقات لـ $y$ بدلالة فروقها المركزية وبالعكس يمكن التعبيرعن مفكوك الفروق بدلالة المشتقات وذلك بالطرق الرمزية .**

**تصبح المعادلة (2.7.6) بواسطة المعادلتين (2.4.7),(2.4.9) كالتالي :**

$$\mu\delta y_i = \frac{1}{2}(y_r - y_l) = \frac{1}{2} e^{hD} y_i - \frac{1}{2} e^{-hD} y_i$$
$$= \frac{e^{hD} - e^{-hD}}{2} y_i = \sinh (hD) y_i$$

وتصبح رمزيا بالشكل التالي :

$$\mu\delta = \sinh (hD) \qquad (2.7.8)$$

بتذكر مفكوك تيلر للجيب الزائدي

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

يكون مفكوك الفرق المركزي الموسط الأول بدلالة المشتقات

$$\mu\delta = hD + \frac{h^3D^3}{6} + \frac{h^5D^5}{120} + \ldots. \qquad (2.7.9)$$

**وبالمثل ، باستخدام المعادلات (2.7.2) , (2.4.7), (2.4.9) يصبح الفرق المركزي الثاني**

$$\delta^2 y_i = e^{hD} y_i - 2y_i + e^{-hD} y_i = 2\left(\frac{e^{hD} + e^{-hD}}{2} - 1\right) y_i$$
$$= 2[\cosh (hD) - 1] y_i.$$

وباستخدام مفكوك الجيب تمام الزائدي cosh

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

يمكن كتابة الفرق المركزي الثاني رمزيا بالشكل :

$$\delta^2 = h^2 D^2 + \frac{h^4 D^4}{12} + \frac{h^6 D^6}{360} + \dots. \qquad (2.7.10)$$

وعلى نفس النمط يمكن الحصول على نفس النتيجة بفك الفرق المركزي الاول غير الموسط في متسلسلة [ المعادلة (2.7.1) ]

$$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} = (e^{hD/2} - e^{-hD/2}) y_i$$
$$= 2 \sinh \left(\frac{hD}{2}\right) y_i = \left(hD + \frac{h^3 D^3}{2^2 \cdot 3!} + \frac{h^5 D^5}{2^4 \cdot 5!} + \dots\right) y_i,$$

ومنها بصورة عامة

$$\delta^n = 2^n \sinh^n \left(\frac{hD}{2}\right) \qquad (2.7.11)$$

وبصورة خاصة حيث $n = 2$ نستخرج المعادلة (2.7.10) .

ان حاصل ضرب المعادلتين ( 2.7.9 ) و ( 2.7.10 ) يعطي مفكوك الفرق الموسط الثالث

$$\mu\delta^3 = h^3 D^3 + \frac{h^5 D^5}{4} + \frac{h^7 D^7}{40} + \dots, \qquad (2.7.12)$$

كما ان مربع المعادلة ( 2.7.10 ) يعطي مفكوك الفرق المركزي الرابع

$$\delta^4 = h^4 D^4 + \frac{h^6 D^6}{6} + \frac{h^8 D^8}{80} + \dots. \qquad (2.7.13)$$

وعلى العكس . للحصول على مفكوك المشتقة الاولى بدلالة الفروق المركزية تحل المعادلة ( 2.7.8 ) للمقدار $hD$ :

$$hD = \sinh^{-1}(\mu\delta).$$

وبالتعويض بمتسلسلة $\sinh^{-1} x$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \dots,$$

نحصل على :

$$hD = \mu\delta - \frac{\mu^3\delta^3}{6} + \frac{3\mu^5\delta^5}{40} - \dots,$$

وباستخدام المعادلة (2.7.7 ) لاقصاء القوى الزوجية للمتغير $\mu$ يصبح مفكوك $hD$ اخيرا كالتالي :

$$hD = \mu\left(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots\right). \qquad (2.7.14)$$

باخذ قوى $hD$ واستعمال المعادلة (2.7.7 ) مرة اخرى للتخلص من قوى m الزوجية. نحصل بالمثل على :

$$h^2D^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots;$$

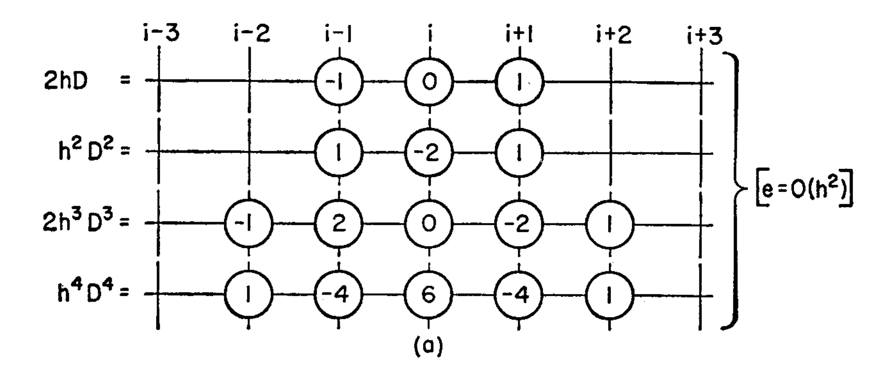
$$h^3D^3 = \mu\left(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \dots\right); \qquad (2.7.15)$$

$$h^4D^4 = \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \dots.$$

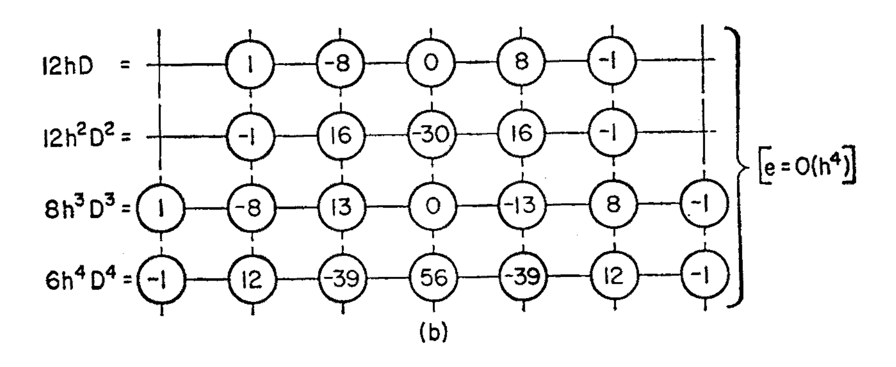
باستخدام الحد الاول في هذه المفكوكات ، يمكن تقريب مشتقات $y$ بدلالة مفكوكات الفروق المركزية التي اعطي خطؤها ، بدلالة الفروق ايضا

$$
\begin{aligned}
2hDy_i &= (y_r - y_l) + 2\epsilon_1 \\
&\left[\epsilon_1 = \mu\left(-\frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \ldots\right) y_i\right]; \\
h^2D^2y_i &= y_r - 2y_i + y_l + \epsilon_2 \\
&\left[\epsilon_2 = \left(-\frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \ldots\right) y_i\right]; \qquad [\epsilon = 0(h^2)] \\
2h^3D^3y_i &= (y_{rr} - 2y_r + 2y_l - y_{ll}) + 2\epsilon_3 \qquad\qquad (2.7.16) \\
&\left[\epsilon_3 = \mu\left(-\frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \ldots\right) y_i\right]; \\
h^4D^4y_i &= y_{rr} - 4y_r + 6y_i - 4y_l + y_{ll} + \epsilon_4; \\
&\left[\epsilon_4 = \left(-\frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \ldots\right) y_i\right].
\end{aligned}
$$

بمقارنة هذه المعادلات بالمعادلات (2.7.9) الى (2.7.13) يثبت ان الخطأ في المشتقات المناظرة هو من مرتبة $h^2$ ولذلك فان الفروق المركزية الموسطة هي اكثر دقة من تعابير أي من الفروق التراجعية او الامامية كما ان من الممكن اثبات انه عند اخذ الحدين الاوليين في هذه المفكوكات [ معادلة ( 2.7.14 ) والمعادلة ( 2.7.15 ) ] فان الخطأ في المشتقات المناظرة يكون من مرتبة $h^4$ ، وانه عند اخذ $m$ من الحدود يكون الخطأ من مرتبة $h^{2m}$ ان جزيئات الشكل 2.8 تعطي تعابير الفروق المركزية الاكثر شيوعا للمشتقات وهي ذات اخطاء من مرتبة $h^2$ , $h^4$



(a)




شكل ( ٨-٢ ) مؤثرات الفروق المركزية

## 2.8 قاعدة سترلنك للاستكمال *Sterling's Interpolation Formula*

من الممكن الحصول على قاعدة استكمال مبنية على الفروق المركزية الموسطة من مفكوك تيلر ( المعادلة a بند 2.6 ) وذلك بالتعبير عن مشتقات $y$ عند $x = a$ بدلالة الفروق المركزية المستخرجة في البند 2.7 كالتالي.

$$y(a + xh) = \left[1 + \frac{x}{1!}hD + \frac{x^2}{2!}h^2D^2 + \frac{x^3}{3!}h^3D^3 + \dots\right] y(a)$$

$$= \left[1 + x\mu\left(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots\right) + \frac{x^2}{2!}\left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \dots\right)\right.$$

$$\left. + \frac{x^3}{3!}\mu\left(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \dots\right) + \frac{x^4}{4!}(\delta^4 - \dots) + \frac{x^5}{5!}(\delta^5 - \dots) + \dots\right] y(a)$$

$$= \left\{1 + x\mu\delta + \frac{x^2}{2!}\delta^2 + \frac{x(x^2-1)}{3!}\mu\delta^3 + \frac{x^2(x^2-1)}{4!}\delta^4\right.$$

$$+ \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5!}\mu\delta^5 + \dots + \frac{1}{(2k-1)!}x(x^2-1)(x^2-4)\dots$$

$$[x^2 - (k-1)^2]\mu\delta^{2k-1} + \frac{1}{2k!}x^2(x^2-1)(x^2-4)\dots$$

$$\left. [x^2 - (k-1)^2]\delta^{2k} + \dots\right\} y(a). \quad (2.8.1)$$

تدعى المعادلة (2.8.1) بقاعدة سترلنك الاستكمالية.

مثلا بدلالة الجدول 2.8 حيث دونت $y = \tan\theta$ لقيم $\theta = 0(5°)30°$ تحسب قيمة $\tan 16°$ $(a = 15°,\ h = 5°,\ x = 0.2)$ كالتالي :

$$\tan 16^\circ = 0.2679 + 0.2 \times 0.0938 + \frac{\overline{0.2}^2}{2!} 0.0045 + \frac{0.2(\overline{0.2}^2 - 1)}{3!} 0.0017$$
$$+ \frac{\overline{0.2}^2(\overline{0.2}^2 - 1)}{4!} \times 0.0000 = 0.2867.$$

| $\theta$ | $y = \tan\theta$ | $\mu\delta y$ | | $\mu\delta^3 y$ | $\delta^4 y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | | | | |
| 5 | 0.0875 | 0.0882 | 0.0013 | | |
| 10 | 0.1763 | 0.0902 | 0.0028 | 0.0016 | 0.0002 |
| 15 | 0.2679 | 0.0938 | 0.0045 | 0.0017 | 0.0000 |
| 20 | 0.3640 | 0.0992 | 0.0062 | 0.0022 | 0.0009 |
| 25 | 0.4663 | 0.1067 | 0.0088 | | |
| 30 | 0.5774 | | | | |

جدول ٨ ـ ٢

## 2.9 استكمال لكرانج لنقاط غير منتظمة التباعد

***Lagrange's Interpolation for Unevenly Spaced Points***

تبنى الصيغة الاستكمالية لنقاط الارتكاز غير منتظمة التباعد بامرار متعدد حدود من درجة $n$ في $(n + 1)$ من النقاط . لنفرض اننا اعطينا النقاط التالية

$$(x_0,y_0); \quad (x_1,y_1); \quad (x_2,y_2); \quad \ldots; \quad (x_n,y_n), \qquad (2.9.1)$$

فمتعدد الحدود

$$P_k(x) \equiv C_k p_k(x)$$
$$= C_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)$$

يساوي صفر عند جميع $x_i$ عدا $x = x_k$

ولكي تكون قيمة $P_k$ تساوي واحد عند $x = x_k$ ينبغي كون :

$$C_k = \frac{1}{[(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)]} \qquad (2.9.2)$$

وان التركيب الخطي لمتعددات الحدود ذات الدرجة $n$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k P_k(x) \qquad (2.9.3)$$

يمر خلال $(n+1)$ من نقاط المعادلة ( 2.9.1 ) لان

$$P_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

تسمى المعادلة ( 2.9.3 ) بصيغة استكمال لكرانج .

على سبيل المثال خذ النقاط التالية (13,20) ; (7,12); (3,5); (1,2);

لكون $L_{ab}$

$$C_0 = \frac{1}{(1-3)(1-7)(1-13)} = -\frac{1}{144};$$

$$C_1 = \frac{1}{(3-1)(3-7)(3-13)} = +\frac{1}{80};$$

$$C_2 = \frac{1}{(7-1)(7-3)(7-13)} = -\frac{1}{144};$$

$$C_3 = \frac{1}{(13-1)(13-3)(13-7)} = +\frac{1}{720}.$$

لايجاد قيمة $P(x)$ عند $x = 4$ نحسب $p_k(4)$

$$p_0(4) = (4-3)(4-7)(4-13) = 27,$$

$$p_1(4) = (4-1)(4-7)(4-13) = 81,$$

$$p_2(4) = (4-1)(4-3)(4-13) = -27,$$

$$p_3(4) = (4-1)(4-3)(4-7) = -9,$$

ومنها

$$P(4) = -\tfrac{27}{144}(2) + \tfrac{81}{80}(5) + \tfrac{27}{144}(12) - \tfrac{9}{720}(20) = 6.6875.$$

## 2.10 قواعد التكامل بدلالة استكمال القطوع المكافئة

***ntegration Formulas by Interpolating Parabolas***

عندما لايمكن أن تستكمل دالة في حدود منتهية أو أن ايجاد قيمة التكامل قد تكون مرهقة فإنه من الملائم انجاز التكامل بالطرق العددية .

يمكن الحصول على ضروب من قواعد التكامل بامرار قطوع مكافئة في عدد من نقاط ارتكاز الدالة المكاملة ( integrand ) ثم استعمال المساحات تحت القطوع المكافئة كقيمة تقريبية للمساحة تحت الدالة المكاملة .

لو اعطينا قيم ارتكاز $f(x)$

$$\ldots, \quad f_{i-2}, \quad f_{i-1}, \quad f_i, \quad f_{i+1}, \quad f_{i+2}, \quad \ldots, \qquad \text{(a)}$$

المنتظمة التباعد $h$ . وأخذنا نقطة الأصل عند $x = x_i$ ( دون فقدان العمومية ) . فالمستقيم

$$f(x) = Ax + B$$

يمر من $(0,f_i)$ ، $(h,f_{i+1})$ بشرط أن يكون

$$A = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}; \qquad B = f_i.$$

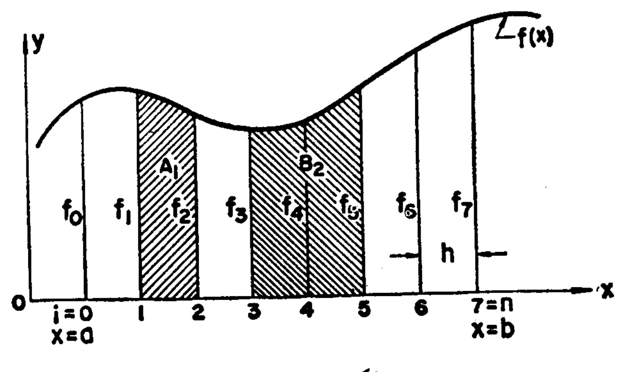
وعليه فإن القطع المكافىء من الدرجة الأولى هو

$$f(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} x + f_i \qquad \text{(b)}$$

ونقرب المساحة تحت $f(x)$ بين 0 ، $h$ بالمقدار

$$A_1 = \int_0^h f(x)\, dx \doteq \frac{f_{i+1} - f_i}{h}\left(\frac{h^2}{2}\right) + f_i h = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}). \qquad (2.10.1)$$

تدعى هذه الصيغة بقاعدة الشبه المنحرف اذ أنها تقرب المساحة تحت شريحة واحدة بمساحة شبه منحرف . شكل 2.9




شكل ( ٩-٢ )

ان القطع المكافيء من الدرجة الثانية

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \qquad \text{(c)}$$

يمر من النقاط

$$(-h,f_{i-1}),\ (0,f_i),\ (h,f_{i+1})$$

اذا كان

$$A = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}; \qquad B = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}; \qquad C = f_i. \qquad \text{(d)}$$

والمساحة تحت هذا القطع المكافيء بين $-h$ ، $h$ تكون

$$B_2 = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx \doteq \frac{2h^3}{3}A + 2hC = \frac{h}{3}[f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}]. \qquad (2.10.2)$$

هذه قاعدة سبمسون *Simpson* ) المثلثة لمساحة شريحتين عرض كل منها $h$
بالمثل تكون مساحة شرائح تحت المقطع المكافيء (c), (d) بين $-2h$ ، $+2h$

$$B_4 = \int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \doteq \frac{4h}{3}[2f_{i+1} - f_i + 2f_{i-1}]. \qquad (2.10.3)$$

ان القطع المكافيء من الدرجة الثالثة

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \qquad \text{(e)}$$

له مساحة موزعة على ثلاث شرائح عرض كل منها $h$ هي

$$C_3 = \int_{-3h/2}^{3h/2} f(x)\,dx = \tfrac{9}{4}Bh^3 + 3Dh \qquad \text{(f)}$$

ومساحة شريحة واحدة هي

$$C_1 = \int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx = \tfrac{1}{12}Bh^3 + Dh. \qquad \text{(g)}$$

ان المعاملات $B$ ، $D$ من القطع المكافيء (e) المار من النقاط $f_0, f_1, f_2, f_3$ هي

$$B = \frac{1}{4h^2}(f_0 - f_1 - f_2 + f_3);$$
$$D = \frac{1}{16}(-f_0 + 9f_1 + 9f_2 - f_3). \qquad \text{(h)}$$

وعليه

$$C_1 = \int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx \doteq \frac{h}{24}(-f_0 + 13f_1 + 13f_2 - f_3); \quad (2.10.4)$$

$$C_3 = \int_{-3h/2}^{3h/2} f(x)\,dx \doteq \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3). \quad (2.10.5)$$

تعرف المعادلة (2.10.5) بانها قاعدة الثلاثة أثمان لسمبسون لمساحة ثلاث شرائح عرض كل منها h وفي متناولنا استخدامها مع قاعدة سمبسون الثلثية لكي تغطي عدداً فردياً من الشرائح .

من الممكن استخراج عدد غير محدود من الصيغ بهذا الأسلوب ، كما أن أي عدد من هذه الصيغ قد يجمع للحصول على صيغ جديدة .

## 2.11 قواعد التكاملات بمتسلسلات تيلر

***Integration Formulas by Taylor Series***

لتقييم الخطأ المتأصل من صيغ التكامل التي اشتقت في البند 2.10 يكون من الضروري استخدام متسلسلات تيلر للحصول على هذه الصيغ كما تم سابقاً مع صيغ التفاضلات . بأخذ المشتقات المتعاقبة للتكامل

$$y(x) = \int_a^x f(z)\,dz; \quad (a)$$

$$y' = f(x); \quad y'' = f'(x); \quad \ldots; \quad y^{(n)} = f^{(n-1)}(x); \quad \ldots,$$

يصبح مفكوك تيلر للمقدار $y(x \pm h)$ حول $x$

$$y(x \pm h) = y(x) \pm \frac{h}{1!}f(x) + \frac{h^2}{2!}f'(x) \pm \frac{h^3}{3!}f''(x) + \ldots. \quad (b)$$

وعليه فان المساحة تحت شريحة واحدة وشريحتين هي

$$I_1 = \int_x^{x+h} f(z)\,dz = y(x+h) - y(x)$$
$$= h\left[f(x) + \frac{1}{2!}hf'(x) + \frac{1}{3!}h^2f''(x) + \ldots\right]; \quad (2.11.1)$$

$$I_2 = \int_{x-h}^{x+h} f(z)\,dz = y(x+h) - y(x-h)$$
$$= h[2f(x) + \tfrac{1}{3}h^2f''(x) + \tfrac{1}{60}h^4f^{iv}(x) + \ldots]. \quad (2.11.2)$$

لتعيين الخطأ في قاعدة الشبه المنحرف نعوض $hf_i$ بدلالة الفرق الأمامي الأول من المعادلة (2.5.6)

$$A_1 = h\{f_i + [\tfrac{1}{2}(f_{i+1} - f_i) - \tfrac{1}{4}h^2f_i'' - \tfrac{1}{12}h^3f_i''' - \ldots] + \tfrac{1}{6}h^2f_i'' + \ldots\}$$
$$= \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{h^3}{12}f_i'' - \frac{h^4}{24}f_i''' + \ldots . \quad (2.11.3)$$

يظهر من هذا أن الخطأ عند استعمال المعادلة ( 2.10.1 ) هو من مرتبة $h^3$ وبالمثل . عند التعويض في المعادلة ( 2.11.2 ) عن $h^2f''(x)$ بمفكوك فروقها المركزية من المعادلة (2.7.10

$$B_2 = h\{2f_i + \tfrac{1}{3}[f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} - \tfrac{1}{12}h^4f_i^{iv} - \ldots] + \tfrac{1}{60}h^4f_i^{iv} + \ldots\}$$
$$= \frac{h}{3}(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}) - \frac{h^5f_i^{iv}}{90} + \ldots, \quad (2.11.4)$$

يتبين أن الخطأ في صيغة سيمبسون الثلثية [المعادلة (2.10.2) ] هو من مرتبة $h^5$
كمايمكن اننبين ان الخطأ في صيغة الثلاثة أثمان لسيمبسون هو من مرتبة $h^5$
بالمثل اذا عبر من $h^4f_i^{iv}, h^2f_i$ بدلالة الفروق المركزية يمكن الحصول على $I_4$ بواسطة صيغة ذات خمسة نقاط خطؤها من مرتبة $h^7$

$$D_4 = \frac{2h}{45}(7f_{i-2} + 32f_{i-1} + 12f_i + 32f_{i+1} + 7f_{i+2}) + 0(h^7). \quad (2.11.5)$$

كما يمكن الحصول على صيغ $I_2$ ( المساحة تحت شريحتين ) ذات اخطاء من مرتبة $\ldots, 11, 9$

وتستخرج بنفس الاسلوب. ان لصيغة السبع نقاط مجموعة معاملات معقدة وخطؤها من مرتبة $h^9$ وغالبا ما تفضل صيغة ويدل( *Weddle* ) الأكثر ملائمة وان كان خطؤها من مرتبة $h^7$

$$E_6 = \frac{3h}{10}(f_{i-3} + 5f_{i-2} + f_{i-1} + 6f_i + f_{i+1} + 5f_{i+2} + f_{i+3}) + 0(h^7). \quad (2.11.6)$$

يمكن اشتقاق صيغ احادية الجانب . وبخطأ من أي مرتبة . بسهولة وذلك بتكامل صيغ استكمال نيوتن بين $a$ ، $a + h$

$$I_1 = h\int_0^1 \left[1 + x\Delta + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 + \dots\right] f(a)\,dx$$
$$= h\left[1 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{12}\Delta^2 + \frac{1}{24}\Delta^3 - \frac{19}{720}\Delta^4 + \dots\right] f(a). \qquad (2.11.7)$$

بأخذ حدين من حدود المتسلسلة تعطي المعادلة (2.11.7)

$$A_1 = h\left[1 + \frac{1}{2}\Delta\right] f(a) = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + 0(h^3).$$

بأخذ ثلاثة حدود من المتسلسلة نحصل على

$$B_1 = h\left[1 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{12}\Delta^2\right] f(a) = \frac{h}{12}[5f_i + 8f_{i+1} - f_{i+2}] + 0(h^4). \qquad (2.11.8)$$

وبأربعة حدود المعادلة (2.11.7) تعطي .

$$C_1 = h\left[1 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{12}\Delta^2 + \frac{1}{24}\Delta^3\right] f(a)$$
$$= \frac{h}{24}(9f_i + 19f_{i+1} - 5f_{i+2} + f_{i+3}) + 0(h^5). \qquad (2.11.9)$$

عندما يقتضي بسط التكامل العددي الى عدد كبير من الشرائح عرض كل منها $h$ فانه يمكن جمع المعادلات المشتقة اعلاه وتقديم تراكيب احداثيات المرتكزات الناتجة من هذا الجمع على شكل « جزيئات رياضية » مع مرتبة الخطأ المتراكم .

ان تكاملا منبسطا على $n$ من الشرائح $x = a$ الى $x = b$ ، حسب قاعدة الشبه المنحرف المعادلة (2.11.3) ، مثلا ، يعطى بالمعادلة :

$$\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx = \left(\tfrac{1}{2}\right)-(1)-(1)-\;\dots\;-(1)-(1)-\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{h}O(h^2)$$

(a) Trapezoidal Rule

$$\frac{3}{h}\int_a^b f(x)\,dx = (1)-(4)-(2)-(4)-\;\dots\;-(2)-(4)-(1) + \frac{1}{h}O(h^4)$$

(b) Simpson's Rule

شكل (١٠-٢) قاعدة سيمبسون

$$A = h[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n] + e_t, \qquad (2.11.10)$$

حيث يصبح الخطأ المتراكم ، حسب نظرية المتوسط ، تقريبا

$$e_t \doteq -\frac{h^3}{12}(f_0'' + f_1'' + \ldots + f_{n-1}'') = -h^2\frac{nh}{12}f''(\bar{x}_n) = -h^2\frac{b-a}{12}f''(\bar{x}_n) \quad (2.11.11)$$

وهو من مرتبة $h^2$

ان نفس المساحة المنبسطة على عدد زوجي من الشرائح h ، تصبح حسب قاعدة سيمبسون الثلثية معادلة (2.11.4)

$$A = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 4f_{n-1} + f_n] + e_S, \quad (2.11.12)$$

حيث ان الخطأ بصورة تقريبية

$$e_S \doteq -\frac{h^5}{90}[f_1^{iv} + f_3^{iv} + \ldots + f_{n-1}^{iv}]$$

$$= -\frac{h^4}{90}\frac{n}{2}hf^{iv}(\bar{x}_n) = -h^4\frac{b-a}{180}f^{iv}(\bar{x}_n) \quad (2.11.13)$$

وهو من مرتبة $h^4$

ان شكل 2.10 يعطي « جزيئات » قانوني الشبه المنحرف وسمبسون الثلثي .
لقد حسب التكامل التالي

$$A = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = 2 \quad (c)$$

في الجدول 2.9 بطريقة الشبه المنحرف وفي الجدول 2.10 بطريقة سمبسون الثلثية

شكل ( ٩-٢ )

**Numerical Integration by the Trapezoidal Rule**

| | | $n = 2$, $h = \pi/2$ | | $n = 4$, $h = \pi/4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\sin x$ | $M$ | | $M$ | |
| 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 |
| $\pi/4$ | 0.707 | | | 1 | 0.707 |
| $\pi/2$ | 1.000 | 1 | 1.000 | 1 | 1.000 |
| $3\pi/4$ | 0.707 | | | 1 | 0.707 |
| $\pi$ | 0 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 |
| | | $\Sigma_2 =$ | 1.000 | $\Sigma_4 =$ | 2.414 |

| $n = 6$, $h = \pi/6$ | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\sin x$ | $M$ | |
| 0 | 0 | 1/2 | 0 |
| $\pi/6$ | 0.500 | 1 | 0.500 |
| $\pi/3$ | 0.866 | 1 | 0.866 |
| $\pi/2$ | 1.000 | 1 | 1.000 |
| $2\pi/3$ | 0.866 | 1 | 0.866 |
| $5\pi/6$ | 0.500 | 1 | 0.500 |
| $\pi$ | 0 | 1/2 | 0 |
| | | $\Sigma_6 =$ | 3.732 |

جدول ( ٩-٢ )

$$A_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1.000 = 1.571; \qquad e_2 = \frac{2 - 1.571}{2} \cdot 100 = 21 \text{ per cent.}$$

$$A_4 = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2.414 = 1.896; \qquad e_4 = \frac{2 - 1.896}{2} \cdot 100 = 5.2 \text{ per cent.}$$

$$A_6 = \left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 3.732 = 1.954; \qquad e_6 = \frac{2 - 1.954}{2} \cdot 100 = 2.3 \text{ per cent.}$$

اذا ما اضيفت شريحة واحدة ذات عرض $h = \pi/4$ الى التكامل بقاعدة سمبسون في حالة $n = 4$ فان المعادلة (2.10.5) تعطي للشرائح الثلاثة الأخيرة ذات القيم

$$f_3 = -0.707; \qquad f_2 = 0; \qquad f_1 = 0.707; \qquad f_0 = 1.000;$$

$$\Delta A = \frac{3\pi}{8 \times 4}(1.000 + 3 \times 0.707 + 3 \times 0 - 0.707) = 0.711 \quad (e = 0.57\%)$$

**Table 2.10**
**Numerical Integration by Simpson's 1/3 Rule**

| | | $n = 2$, $h = \pi/2$ | | $n = 4$, $h = \pi/4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\sin x$ | $M$ | | $M$ | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\pi/4$ | 0.707 | | | 4 | 2.828 |
| $\pi/2$ | 1.000 | 4 | 4 | 2 | 2.000 |
| $3\pi/4$ | 0.707 | | | 4 | 2.828 |
| $\pi$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | | $\Sigma_2 =$ | 4 | $\Sigma_4 =$ | 7.656 |

جدول ( ١٠-٢ )

$$A_2 = \frac{\pi/2}{3} \cdot 4 = 2.094; \qquad e_2 = 4.7 \text{ per cent.}$$

$$A_4 = \frac{\pi/4}{3} \cdot 7.656 = 2.004; \qquad e_4 = 0.23 \text{ per cent.}$$

( ان هذا الخطأ الكبير سببه كبر معامل $h^5$ النسبي في الخطأ من هذه القاعدة )
باضافة مساحة الشريحتين الاوليتين :

$$\Delta A_2 = \frac{\pi}{3 \times 4}(0 + 4 \times 0.707 + 1.000) = 1.002 \ (e = 0.2\%);$$

تصبح مساحة الشرائح الخمسة

$$A = 1.713 \ (e = 0.35\%)$$

## 2.12 التكامل بنقاط ارتكاز غير منتظمة التباعد

***Integration with Unevenly Spaced Pivotal Points***

ينجز التكامل بنقاط ارتكاز غير منتظمة التباعد بقاعدة الشبه المنحرف بجعل $h$ متغيرة اوبصيغة من نمط سمبسون مستخرجة بدلالة ثلاث احداثيات صادية بتباعد $h$ ، $\alpha h$. بوضع $-h, \alpha h$ بدلا من $h$ في المعادلة (b) من البند 2.11

$$y(x + \alpha h) = y(x) + \frac{\alpha h}{1!} f(x) + \frac{\alpha^2 h^2}{2!} f'(x) + \frac{\alpha^3 h^3}{3!} f''(x) + \ldots$$

$$y(x - h) = y(x) - \frac{h}{1!} f(x) + \frac{h^2}{2!} f'(x) - \frac{h^3}{3!} f''(x) + \ldots,$$

| $i$ | $x_i$ | $h$ | $f_i$ | $(h_{i-½} + h_{i+½})f_i$ | $f_{i+1} + 3f_i$ | $h_{i-½}(f_{i+1} + 3f_i)$ | $3f_i + f_{i-1}$ | $h_{i-½}(3f_i + f_{i-1})$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | 1.000 | 0.100 | | | | | 4 |
| | | 0.1 | | | | | | | |
| 1 | 0.1 | | 0.905 | 0.272 | 3.456 | 0.346 | 3.456 | 0.691 | 3 |
| | | 0.2 | | | | | | | |
| 2 | 0.3 | | 0.741 | 0.445 | | | | | 2 |
| | | 0.4 | | | | | | | |
| 3 | 0.7 | | 0.497 | 0.596 | 1.714 | 0.686 | 1.714 | 1.371 | 1 |
| | | 0.8 | | | | | | | |
| 4 | 1.5 | | 0.223 | 0.178 | | | | | 0 |
| | | | Σ | 1.591 | Σ | 0.886 | Σ | 2.062 | |
| | | | $A = 0.795$ | | $A = 0.774$ | | $A = 0.773$ | | |
| | | | $e\% = 2.3$ | | $e\% = 0.5$ | | $e\% = 0.5$ | | |

جدول ( ١١-٢ )

تصبح مساحة شريحتين غير متساويتين

$$y(x + \alpha h) - y(x - h) = h\left[(\alpha + 1)f(x) + \frac{\alpha^2 - 1}{2!}hf'(x) + \frac{(\alpha^3 + 1)}{3!}h^2f''(x) + \dots\right],$$

وبتعويض $hf'(x)$ و $h^2f''(x)$ ضمن المعادلتين (2.3.4) و(2.3.5) نحصل على

$$B_2 = \frac{h}{3}\frac{\alpha + 1}{2\alpha}[(2\alpha - 1)f_{i+1} + (\alpha + 1)^2f_i + \alpha(2 - \alpha)f_{i-1}] + 0(h^2) \tag{2.12.2}$$

يعطينا جدول 2.11 تكامل الدالة $y = e^{-x}$ بين 0 و1.5 بالمعادلة (2.12.1) وبالمعادلة (2.12.2) مع $2 = \alpha$ بحيث ان

$$B_2 = \tfrac{3}{4}h_{i-½}(f_{i+1} + 3f_i)$$

واخيراً بالمعادلة (2.12.2) مع $\alpha = \frac{1}{2}$ أي مكاملين من $x = 1.5$ الى $x = 0$ بحيث

$$B_2 = \tfrac{3}{8}h(3f_i + f_{i-1}).$$

## 2.13 استيفاءات ريجارد سن Richardson's Extrapolations

مما سبق ظهر لنا ان الخطأ في معادلات الفروق للتفاضل والتكامل يعتمد على التباعد $h$ بين نقاط الارتكاز وانه من مرتبة $h^2$ او $h^4$ في صيغ التقريب الاحسن ، فقيمة المشتقة التي نحصل عليها بأخذ حد واحد من مفكوك فروقها المركزية وقيمة التكامل الذي نحصل عليه من قاعدة الشبه المنحرف ، يكون الخطأ فيهما من مرتبة $h^2$ بينما يكون الخطأ في قيمه المشتقة التي نحصل عليها بأخذ حدين من حدود مفكوك فروقها المركزية وقيمة التكامل بطريقة سمبسون الثلثية من مرتبة $h^4$

ان مرتبة هذه الاخطاء تقتنى بأخذ الحدود العليا من المفكوكات بنظر الاعتبار ، غير ان القاريء سيلاحظ ان الخطأ ، في جميع الحالات اعلاه ، في تعابير الفروق المركزية للمشتقات عند نقطة ما ، $x$ ، يمثل بمتسلسلة من نوع :

$$e(x) = f_1(x)h^2 + f_2(x)h^4 + f_3(x)h^6 + \dots \qquad (2.13.1)$$

عندما يكون التعبير المقيم بالفروق مستقلاً عن $x$ . كما في حالة التكاملات المحددة ، او عندما يحسب الخطأ بقيم تباعد $h$ مختلفة في نفس النقطة $x$ ، فان لمتسلسلة الخطأ معاملات ثابتة ويمكن كتابتها .

$$e = c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \dots \qquad (2.13.2)$$

وعليه فان قيمة $f(x)$ في مفكوكات الاخطاء من مرتبة $h^4$ ، مثلاً . تساوي صفراً وسنبين هنا ان المعرفة بصيغة الخطأ تسمح باعطاء تقريب افضل عند حساب قيم المشتقات والتكاملات باقل جهد اضافي .

لنفرض ان قيمة التكامل $A$ قد حسبت عددياً باستخدام $n_1$ و$n_2$ من الشرائح طبقاً لقاعدة الشبه المنحرف ، أي باخذ

$$h_1 = \frac{b-a}{n_1}; \qquad h_2 = \frac{b-a}{n_2},$$

اجعل $A_{n_1}$ و$A_{n_2}$ القيمتين التقريبيتين المتناظرتين . فاذا كانت كل من $h_1$ و $h_2$ صغيرة لدرجة تسمح لنا باهمال جميع حدود المعادلة (2.13.2) عدا الحد الاول فانه يمكن ان نكتب

$$e_1 \equiv A - A_{n_1} \doteq \frac{c_1(b-a)^2}{n_1^2}; \qquad e_2 \equiv A - A_{n_2} \doteq \frac{c_1(b-a)^2}{n_2^2},$$

حيث $c_1$ مجهولة . بحذف الثوابت المجهولة $c_1(b-a)^2$ من هاتين المعادلتين ثم حلها لقيم $A$ الصحيحة نحصل على ما يسمى بصيغة استيفاء $h^2$

$$A_{n_1,n_2} = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} A_{n_2} - \frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} A_{n_1} = \alpha_1 A_{n_1} + \alpha_2 A_{n_2}, \quad (2.13.3)$$

التي تعطي تقريباً ممتازاً لقيمة $A$ كلما كانت الحدود العليا من متسلسلة الخطأ قابلة للاهمال .

مثلاً بأخذ $A_2 = 1.571$ و $A_4 = 1.896$ من جدول 2.9 تكون قيمة التكامل الوارد في بند 2.11 تبعاً للمعادلة (2.13.3)

$$A_{2,4} = \frac{4^2}{4^2 - 2^2} 1.896 - \frac{2^2}{4^2 - 2^2} 1.571$$
$$= \tfrac{4}{3} \cdot 1.896 - \tfrac{1}{3} \cdot 1.571 = 2.004,$$

بخطا قدره 0.2 بالمائة مقابل خطأ قدره 21 بالمائة 5.2 بالمائة في $A_4, A_2$ على التناظر . باعادة الحساب لقيمة $n = 6, n = 4$ نحصل على :

$$A_{4,6} = \frac{6^2}{6^2 - 4^2} 1.954 - \frac{4^2}{6^2 - 4^2} 1.896 = 2.0004,$$

بخطأ قدره 0.02 بالمائة

ان جدول 2.12 يعطي المعاملات

$$\alpha_1 = -\frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2}; \qquad \alpha_2 = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} \quad (2.13.4)$$

التي هي معاملات صيغة استيفاء $h^2$ معادلة (2.13.3) لنسب $n_2, n_1$ الاكثر ورودا لان المعادلة (2.13.4) تعتمد على النسب $n_2/n_1$ فقط .

**Table 2.12**
**$h^2$—Extrapolation Coefficients**

| $n_2/n_1$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|---|---|---|
| 2/1 | −0.3333333333 | 1.3333333333 |
| 3/2 | −0.8 | 1.8 |
| 4/3 | −1.2857142857 | 2.2857142857 |
| 5/4 | −1.7777777778 | 2.7777777778 |
| 6/5 | −2.2727272727 | 3.2727272727 |
| 7/6 | −2.7692307692 | 3.7692307692 |
| 8/7 | −3.2666666667 | 4.2666666667 |
| 3/1 | −0.125 | 1.125 |
| 5/3 | −0.5625 | 1.5625 |
| 7/5 | −1.0416666667 | 2.0416666667 |

جدول (١٢-٢) معاملات استيفاء $h^2$

عند حساب ثلاثة تقريبات $A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3}$ لقيمة $A$ بثلاثة فواصل $h_1, h_2, h_3$ تتناسب عكسياً مع $n_1, n_2, n_3$ يمكن ان نأخذ حدين من حدود معادلة الخطأ (2.13.2) ونكتب

$$e_1 \equiv A - A_{n_1} = \frac{c_1(b-a)^2}{n_1^2} + \frac{c_2(b-a)^4}{n_1^4};$$

$$e_2 \equiv A - A_{n_2} = \frac{c_1(b-a)^2}{n_2^2} + \frac{c_2(b-a)^4}{n_2^4};$$

$$e_3 \equiv A - A_{n_3} = \frac{c_1(b-a)^2}{n_3^2} + \frac{c_2(b-a)^4}{n_3^4}.$$

بحذف الثابتين المجهولين $c_1(b-a)^2$ ، $c_2(b-a)^4$ من هذين المعادلات وحلها لقيمة $A$ الصحيحة نحصل على صيغة استيفاء -($h^2,h^4$)

$$A_{n_1,n_2,n_3} = \frac{n_1^4}{(n_2^2-n_1^2)(n_3^2-n_1^2)} A_{n_1} - \frac{n_2^4}{(n_2^2-n_1^2)(n_3^2-n_2^2)} A_{n_2} + \frac{n_3^4}{(n_3^2-n_1^2)(n_3^2-n_2^2)} A_{n_3} \equiv \beta_1 A_{n_1} + \beta_2 A_{n_2} + \beta_3 A_{n_3}, \quad (2.13.5)$$

حيث اعطيت معاملاتها في جدول 2.13 لنسب $n_3/n_2/n_1$

**Table 2.13**
**$(h^2,h^4)$—Extrapolation Coefficients**

| $n_3/n_2/n_1$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
|---|---|---|---|
| 3/2/1 | 0.0416666667 | −1.0666666667 | 2.025 |
| 4/2/1 | 0.0222222222 | −0.4444444444 | 1.4222222222 |
| 4/3/2 | 0.2666666667 | −2.3142857143 | 3.0476190476 |
| 5/4/2 | 0.6349206349 | −2.3703703704 | 3.3068783069 |
| 5/4/3 | 0.7232142857 | −4.0634920635 | 4.3402777778 |
| 6/5/4 | 1.4222222222 | −6.3131313131 | 5.8909090909 |
| 7/6/5 | 2.3674242424 | −9.0629370629 | 7.6955128205 |
| 8/7/6 | 3.5604395604 | −12.3128205128 | 9.7523809524 |
| 5/3/1 | 0.0052083333 | −0.6328125 | 1.6276041667 |
| 7/5/3 | 0.1265625 | −1.6276041667 | 2.5010416667 |

جدول (٢-١٣) معاملات استيفاء $(h^2, h^4)$

على سبيل المثال . باستخدام التقريبات الثلاثة $A_2, A_4, A_6$ للتكامل(c) من بند 2.11 من جدول 2.9 والمعاملات $\beta$ المناظرة للنسب $3/2/1 = 6/4/2$ من جدول 2.13 نحصل على

$$A_{2,4,6} = 0.04167 \cdot 1.571 - 1.06667 \cdot 1.896 + 2.025 \cdot 1.954 = 1.99991,$$

بخطأ قدره 0.005 بالمائة

عندما تكون مرتبة الخطأ $h^4$ تكون قيمة $c_1 = 0$ في المعادلة (2.13.2) . ويأخذ الخطأ في تقريبين متعاقبين باستعمال $n_1$ و $n_2$ فترات ثانوية الشكل التالي

$$e_1 \equiv A - A_{n_1} = \frac{c_2(b-a)^4}{n_1^4} + \frac{c_3(b-a)^6}{n_1^6} + \ldots$$

$$e_2 \equiv A - A_{n_2} = \frac{c_2(b-a)^4}{n_2^4} + \frac{c_3(b-a)^6}{n_2^6} + \ldots .$$

بأخذ الحد الاول فقط واهمال الحدود الاخرى في متسلسلة الخطأ وبعد الحل لقيمة $A$ نحصل على صيغة استيفاء $h^4$ التالية

$$A_{n_1,n_2} = \frac{n_2^4}{n_2^4 - n_1^4} A_{n_2} - \frac{n_1^4}{n_2^4 - n_1^4} A_{n_1} = \gamma_1 A_{n_1} + \gamma_2 A_{n_2}, \quad (2.13.6)$$

التي تظهر معاملاتها في جدول 2.14 *

**$h^4$—Extrapolation Coefficients**

| $n_2/n_1$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ |
|---|---|---|
| 2/1 | −0.0666666667 | 1.0666666667 |
| 3/2 | −0.2461538462 | 1.2461538462 |
| 4/3 | −0.4628571429 | 1.4628571429 |
| 5/4 | −0.6937669377 | 1.6937669377 |
| 6/5 | −0.9314456036 | 1.9314456036 |
| 7/6 | −1.1728506787 | 2.1728506787 |
| 8/7 | −1.4165191740 | 2.4165191740 |
| 3/1 | −0.0125 | 1.0125 |
| 5/3 | −0.1488970588 | 1.1488970588 |
| 7/5 | −0.3519144144 | 1.3519144144 |

جدول ١٤-٢ ) معاملات استيفاء $h^4$

مثال ذلك باستعمال القيمتين $A_4, A_2$ للتكامل (c) من بند 2.11 في جدول 2.10 المعد بقاعدة سمبسون . التي يكون الخطأ فيها من مرتبة $h^4$ . والمعاملات في جدول 2.14 للقيم $n_2/n_1 = 2/1$ نحصل على الاستيفاء التالي

$$A_{2,4} = -0.06667 \cdot 2.094 + 1.06667 \cdot 2.004 = 1.998,$$

بخطأ مقداره هو 0.1 بالمائة

كمثال آخر للاستيفاء خذ القيم التقريبية للمشتقة الاولى لدالة بسل Bessel $J_{1/4}(x)$ عند $x = 0.5$ التي يمكن حسابها بسهولة باستخدام مؤثر الفروق المركزية المعادلة (2.7.16)

$$J'_{1/4}(0.5) \doteq \frac{1}{2h}\,[J_{1/4}(0.5+h) - J_{1/4}(0.5-h)]$$

لقيم $h = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ان قيم المشتقة تظهر في العمود الثالث في جدول 2.15 . بما ان تقريب المشتقات باستخدام الفروق المركزية يتضمن اخطاء من نوع المعادلة (2.13.1) فانه يمكن حساب قيمة استيفاء $(h^2, h^4)$, $h^2$- في هذه الحالة عند قيمة $x$ لـ $n_2/n_1 = 2/1$ ولـ $n_3/n_2/n_1 = 4/2/1$

( ) الجداول 2.14, 2.13, 2.12 حسبت في Istituto Nazionale le Applicazioni المختبر الرياضي الوطني للابحاث من قبل الاستاذ Mauro Picone
هناك جداول تامة للمؤلف نفسه طبعت في شيكاغو سنة 1952 تحت اسم
"First U.S. Congress of Applied Mechanics," *A.S.M.E.*,

من جدولي المعاملات 2.13, 2.12 . ان هذه القيم تظهر في جدول 2.15 مع النسب المئوية للاخطاء المناظرة محسوبة من القيمة الصحيحة $J'_{1/4}(0.5) = 0.21909$

**Table 2.15**

| Approximations | | | | $h^2$—Extrapolations | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | $n$ | $J'_{1/4}(0.5)$ | $e(\%)$ | $n$ | $J'_{1/4}(0.5)$ | $e(\%)$ |
| 0.4 | 1 | 0.30377 | +38.6 | 2/1 | 0.20994 | −4.2 |
| 0.2 | 2 | 0.23340 | +6.5 | 4/2 | 0.21873 | −1.6 |
| 0.1 | 4 | 0.22240 | +1.5 | 8/4 | 0.21906 | −0.013 |
| 0.05 | 8 | 0.21990 | +0.37 | ... | ... | ... |

| $(h^2,h^4)$—Extrapolations | | |
|---|---|---|
| $n$ | $J'_{1/4}(0.5)$ | $e(\%)$ |
| 4/2/1 | 0.21931 | +0.10 |
| 8/4/2 | 0.21908 | −0.004 |

جدول ١٥ - ٢

ان الجدول يبرهن مرة ثانية على انه يمكن تخفيض الخطأ بالاستيفاء وبجهد اضافي قليل جداً .

ينبغي عدم استخدام طريقة الاستيفاء اذا كانت التقريبات المتعاقبة لا تقترب من القيمة الحقيقية بصورة مطردة ( monotonically ) لأنه لايمكن اهمال الحدود العليا من متسلسلات الخطأ.

## تمارين

اعطينا ثلاثة قيم $y_2, y_1, y_0,$ لنقاط موزعة بمسافات منتظمة . عيّن المشتقات الاولى والمشتقات الثانية لـ $y$ عند كل من (a)0 و(b)1 و(c)2 باستخدام قطوع مكافئة الاستكمال وقيم الدالة عند تلك النقاط .

الاجوبة

(a) $y'_0 = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$. (b) $y'_1 = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2)$.

(c) $y'_2 = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2)$; $y''_{0,1,2} = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}$.

اعطينا أربعة قيم $y_3, y_2, y_1, y_0,$ لنقاط موزعة بصورة منتظمة . استخدم الاستكمال بطريقة القطوع المكافئة لتعيين مشتقات $y$ العالية بدلالة هذه القيم المعطاة عند جميع هذه النقاط الاربعة .

الاجوبة

(a) $y_2'$. (b) $y_1'$. (c) $y_0'$. (d) $y_0''$. (e) $y_2''$. (f) $y_3''$.

(b) $y_1' = (1/6h)(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3)$.
(d) $y_0'' = (1/h^2)(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3)$.
(f) $y_3'' = (1/h^2)(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3)$.

2.3 جد صيغة تقريبية الى $y_i'$ مستخدماً طريقة استكمال قطع مكافيء ماراً من نقاط شكل 2.2

الاجوبة

$$Ans.\quad y_i' = \frac{y_r - (1-\alpha^2)y_i - \alpha^2 y_l}{h\alpha(1+\alpha)}.$$

2.4 جد صيغة تقريبيه لـ $y_i''$ باستخدام طريقة استكمال قطع مكافيء يمر من نقاط شكل 2.3a

2.5 اعطيت قيم دالة لنقاط منتظمة البعد $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ استخدم متسلسلة مفكوك تيلر للتعبير عن المشتقات التالية برتب الاخطاء المؤشرة. عيّن الحد الاول من متسلسلة الاخطاء

(a) $y_0'; e = 0(h^2)$.
(b) $y_1'; e = 0(h^2)$.
(c) $y_2'; e = 0(h^2)$.
(d) $y_0''; e = 0(h)$.
(e) $y_1''; e = 0(h^2)$.
(f) $y_2'; e = 0(h^3)$.
(g) $y_1'; e = 0(h^3)$.
(h) $y_0'; e = 0(h^3)$.
(i) $y_0''; e = 0(h^2)$.
(j) $y_3''; e = 0(h^2)$.

الاجوبة

(a) $y_0' = \dfrac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}; e \doteq \dfrac{h^2 y_0'''}{3}$.

(c) $y_2' = \dfrac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}; e \doteq \dfrac{h^2 y_2'''}{3}$.

(e) $y_1'' = \dfrac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}; e \doteq -\dfrac{h^2 y_1^{iv}}{12}$.

(g) $y_1' = \dfrac{-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3}{6h}; e \doteq \dfrac{h^3 y_1^{iv}}{12}$.

(i) $y_0'' = \dfrac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2}; e \doteq \dfrac{11h^2 y_0^{iv}}{12}$.

2.6 اذا اعطيت القيم الخمسة التالية $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ عند خمسة نقاط منتظمة المسافات استخدم مسلسلة مفكوك تيلر لايجاد مشتقات $y$ التالية بدلالة هذه القيم الخمسة جميعها واعط الحد الاول من متسلسلة خطأه في كل حالة

(a) $y_1'$; $e = 0(h^4)$.
(b) $y_2''$; $e = 0(h^4)$.
(c) $y_0'''$; $e = 0(h^2)$.
(d) $y_0''$; $e = 0(h^3)$.
(e) $y_2'''$; $e = 0(h^2)$.

الاجوبة

*Ans.* (a) $y_1' = \frac{1}{24h}(-6y_0 - 20y_1 + 36y_2 - 12y_3 + 2y_4)$;

$e \doteq -\frac{1}{20}h^4 y_1^{v}$.

(c) $y_0''' = \frac{1}{4h^3}(-10y_0 + 36y_1 - 48y_2 + 28y_3 - 6y_4)$;

$e \doteq \frac{21}{12}h^2 y_0^{v}$.

(e) $y_2''' = \frac{1}{4h^3}(-2y_0 + 4y_1 - 4y_3 + 2y_4)$;

$e \doteq -\frac{1}{4}h^2 y_2^{v}$.

2.7 اعطيت القيم السته $y_0, y_1, y_2,$ عند نقاط منتظمة البعد . استخدم متسلسلة مفكوك تيلر للتعبير عن المشتقات التالية بدلالة هذه القيم الستة المعطاة ثم اعط الحد الاول من متسلسلة الاخطاء في كل حالة .

الاجوبة

(a) $y_4''$; $e = 0(h^4)$.
(b) $y_3^{iv}$; $e = 0(h^2)$.
(c) $y_2'$; $e = 0(h^5)$.

*Ans.* (a) $y_4'' = \frac{1}{60h^2}(5y_0 - 30y_1 + 70y_2 - 20y_3 - 75y_4 + 50y_5)$;

$e \doteq -\frac{13}{180}h^4 y_4^{iv}$.

(b) $y_3^{iv} = \frac{1}{5h^4}(5y_1 - 20y_2 + 30y_3 - 20y_4 + 5y_5)$; $e \doteq -\frac{1}{6}h^2 y_3^{vi}$.

(c) $y_2' = \frac{1}{120h}(6y_0 - 60y_1 - 40y_2 + 120y_3 - 30y_4 + 4y_5)$;

$e \doteq -\frac{1}{60}h^5 y_2^{vi}$.

الاجوبة

2.8 اشتق المعادلة (2.3.6) من بند 2.3 وذلك باستخدام متسلسلة مفكوك تيلر بعد ذلك برهن ان الخطأ فيها هو من رتبة $h^2$ . استخدم النقاط في شكل 2.3a

2.9 اشتق المعادلة (2.3.7) من بند 2.3 باستخدام متسلسلة مفكوك تيلر ثم برهن ان الخطأ هو من مرتبة $h^2$ . استخدم النقاط في شكل 2.3b

2.10 استخدم متسلسلة تيلر لتحديد تقريب صيغة النقاط الأربعة لـ $y_i'''$ والحد الأول من متسلسلة الخطأ باستخدام النقاط في شكل 2.3a .

الاجوبة

$$Ans. \quad y_i''' = \frac{6y_r + 6\alpha(2+\alpha)y_l - 3\alpha(1+\alpha)y_{ll} - 3(1+\alpha)(2+\alpha)y_i}{h^3\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)};$$

$$e \doteq \frac{7(1+\alpha) - (1+\alpha^3)}{4\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)} h y_i^{iv}.$$

2.11 بواسطة متسلسلة تيلر عيّن صيغة النقاط الخمسة للتقريب لـ $y_i'''$ والحد الأول المناظر في متسلسلة الخطأ مستخدما النقاط الواردة في شكل 2.11 الموزعة توزيعا منتظما على مسافات قدرها $h$ عدا المسافة الأخيرة على مسافة $\alpha h$ .

الاجوبة

$$Ans. \quad y_i''' = [36y_r + (\alpha^4 - 25\alpha^2 - 60\alpha - 36)y_i + (-3\alpha^4 + 57\alpha^2 + 90\alpha)y_l + (3\alpha^4 - 39\alpha^2 - 36\alpha)y_{ll} + (-\alpha^4 + 7\alpha^2 + 6\alpha)y_{lll}] \big/ h^3(\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha);$$

$$e \doteq \frac{h^2(12\alpha^5 + 50\alpha^4 - 170\alpha^2 - 132\alpha)y_i^{v}}{40(\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha)}.$$

2.12 عين صيغة التقريب لخمسة نقاط لـ $y_i^{iv}$ باستخدام متسلسلة تيلر والحد الأول من متسلسلة الخطأ المقابل لها بواسطة النقاط في التمرين 2.11

اجوبة

$$Ans. \quad y_i^{iv} = [24y_r - (12\alpha^3 + 24\alpha^2 + 36\alpha + 24)y_i + (36\alpha^3 + 60\alpha^2 + 48\alpha)y_l - (36\alpha^3 + 48\alpha^2 + 12\alpha)y_{ll} + (12\alpha^3 + 12\alpha^2)y_{lll}] \big/ h^4(\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha);$$

$$e \doteq \frac{h(-12\alpha^5 + 900\alpha^3 + 720\alpha^2 - 168\alpha)y_i^{v}}{6(\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha)}.$$

2.13 اعطيت القيم التالية $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \ldots,$ لنقاط منتظمة المسافات ، جد صيغ تقريبية لكل مما يأتي (a) $y_i'''$, (b) $y_i^{iv}$, (c) $y_i^{v}$ مع الاخطاء التي من مرتبة $h$ باستخدام

(1) مفكوك الفروق الخلفية ( التراجعية )

(2) قطع مكافىء الاستكمال مارا من أربعة نقاط ، خمسة نقاط ، ستة نقاط على التوالي ، الواقعة على يسار $i$

(3) متسلسلة مفكوك تيلر

جد حيث كان ممكنا الحد الأول من متسلسلة الاخطاء

اجوبة

*Ans.* (a) $y_i''' = \frac{1}{h^3}(y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3})$.

(b) $y_i^{\text{iv}} = \frac{1}{h^4}(y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4})$.

(c) $y_i^{\text{v}} = \frac{1}{h^5}(y_i - 5y_{i-1} + 10y_{i-2} - 10y_{i-3} + 5y_{i-4} - y_{i-5})$.

2.14 جد بصورة تقريبية صيغة لكل من المشتقات التالية مستخدما حدين من حدود مفكوك فروقها الخلفية ، ثم جد الحد الأول من متسلسلات الاخطاء المقابلة لها .

اجوبة

(a) $y_i'$. (b) $y_i''$. (c) $y_i'''$. (d) $y_i^{\text{iv}}$.

*Ans.* (b) $y_i'' = \frac{1}{h^2}(2y_i - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3})$; $e \doteq \frac{11}{12}h^2 y_i^{\text{iv}}$.

(d) $y_i^{\text{iv}} = \frac{1}{h^4}(3y_i - 14y_{i-1} + 26y_{i-2} - 24y_{i-3} + 11y_{i-4} - 2y_{i-5})$;
$e \doteq \frac{34}{12}h^2 y_i^{\text{vi}}$.

2.15 اعطيت القيم $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots,$ لنقاط منتظمة المسافات عيّن تعابير تقريبية لكل من $y_i'''$ (a)، $y_i^{\text{iv}}$ (b)، $y_i^{\text{v}}$ (c) مع الاخطاء من رتبة $h$ باستخدام الطرق التالية

(1) مفكوك الفروق الأمامية

(2) الاستكمال بواسطة القطوع المكافئة المارة من اربعة نقاط ، خمسة نقاط ، ست نقاط على التوالي الواقعة على يمين $i$

(3) متسلسلة مفكوك لتيلر

استخرج كلما أمكن ذلك الحد الأول من متسلسلات الأخطاء .

الاجوبة

*Ans.* (a) $y_i''' = \frac{1}{h^3}(y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i)$.

(b) $y_i^{\text{iv}} = \frac{1}{h^4}(y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i)$.

(c) $y_i^{\text{v}} = \frac{1}{h^5}(y_{i+5} - 5y_{i+4} + 10y_{i+3} - 10y_{i+2} + 5y_{i+1} - y_i)$.

2.16 عين تعبيرا تقريبياً للمشتقات التالية مستخدما حدين من حدود مفكوك الفروق الخلفية . وعيّن كذلك الحد الأول من متسلسلة الخطأ لكل حالة .

(a) $y_i'$. (b) $y_i''$. (c) $y_i'''$. (d) $y_i^{\text{iv}}$.

*Ans.* (b) $y_i'' = \frac{1}{h^2}(2y_i - 5y_{i+1} + 4y_{i+2} - y_{i+3})$; $e \doteq \frac{11}{12}h^2 y_i^{\text{iv}}$.

(d) $y_i^{\text{iv}} = \frac{1}{h^4}(3y_i - 14y_{i+1} + 26y_{i+2} - 24y_{i+3} + 11y_{i+4} - 2y_{i+5})$;
$e \doteq \frac{34}{12}h^2 y_i^{\text{vi}}$.

2.17 اشتق بالتعويض المباشر لمفكوكات الفروق في متسلسلات تيلر (a) في بند 2.6 كلا مما يأتي :

(a) صيغة الاستكمال الأمامي لكريكوري – نيوتن

(b) صيغة الاستكمال التراجعي لكريكوري – نيوتن

2.18 اعطيت $\tan x$ لقيم $x = 23°(1°)28°$ احسب لخمسة ارقام معنوية (a) $\tan 23°15'$ (b) $\tan 27°13'$ مستخدما صيغة الاستكمال الخلفية والأمامية لكريكوري – نيوتن .

لاحظ الرمز $x = a(h)b$ يقوم مقام $x$ من $a$ الى $b$ بفترات $h$

2.19 احسب من الجدول التالي

(أ) $f(3.8)$ لثلاثة ارقام معنوية مستخدما طريقة صيغة الاستكمال التراجعي لكريكوري – نيوتن .

(ب) $f(1.2)$ لثلاثة ارقام معنوية مستخدما صيغة الاستكمال الأمامية لكويكوري – نيوتن .

(ج) $f(5.12)$ لثلاثة ارقام معنوية مستخدما صيغة الاستكمال الأمامية لكريكوري – نيوتن .

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1.00 | 1.50 | 2.20 | 3.10 | 4.60 |

اجوبة

2.20 اعطيت $\sin x$ لقيم $x = 5°(5°)30°$ احسب لخمسة ارقام معنوية بطريقة الاستكمال كلا من

(a) sin 5°14′. (b) sin 25°25′. (c) sin 17°30′.

اجوبة

(b) 0.42917.

2.21 اعطيت $x^3$ لكل من $x = 1(1)5$ جد مكعبات كلا مما يأتي بطريقة الاستكمال

(a) 4.37. (b) 1.35. (c) 3.46.

اجوبة

(a) $(4.37)^3 = 83.45$ (backward). (c) $(3.46)^3 = 41.42$ (backward and forward).

2.22 اعطيت القيم المتساوية الأبعاد التالية : – $y_{rr}, y_r, y_i, y_l, y_{ll}, \ldots$

جد المفكوك التقريبي لكل من(أ) $y_i'$ (ب) $y_i''$ (ج) $y_i'''$ (د) $y_i^{iv}$ مع اخطاءها من المرتبة $h^2$ بالطرق التالية :

(1) باستخدام مفكوك الفروق المركزية . عبّر عن المشتقات بطريقتي الموسّطة وغير الموسّطة .

(2) طريقة استكمال القطوع المكافئة المارة من نقاط منتظمة متناظرة الموقع بالنسبة الى

(3) باستخدام مفكوك متسلسلة تيلر

جد حيث أمكن اول حد من مسلسلة الخطأ .

الجواب انظر شكل 2.8a

2.23 جد بصورة تقريبية مفكوك كل من المشتقات التالية بأخذ حدين من متسلسلة مفكوك الفروق المركزية للمشتقات .

(أ) $y_i'$ (ب) $y_i''$ (ج) $y_i'''$ (د) $y_i^{iv}$

الجواب انظر شكل 2.8b

**2.24** كوّن جداول الفروق التراجعية والأمامية والمركزية للدوال التالية :

(a) $\tan x;\ x = 1°(1°)6°$.
(b) $\cosh x;\ x = 0.1(0.1)0.7$.
(c) $e^{x};\ x = 0(0.5)3.0$.
(d) $J_0(x);\ x = 0(0.1)1.0$.
(e) $x^3 - 4x^2 + 5x + 3;\ x = 0(1)4$.
(f) $\log \sin x;\ x = 5°(5°)25°$.
(g) $e^{-x};\ x = 0(0.5)3.0$.
(h) $\tanh x;\ x = 0.1(0.1)0.7$.

**2.25** عيّن الخطأ من أحدى القيم الموزعة توزيعاً منتظما المعطاة في الجدول التالي وصححها بطريقة الفروق المركزية .

(a)

| $x_i$ | 0.50 | 0.52 | 0.54 | 0.56 | 0.58 | 0.60 | 0.62 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0.5211 | 0.5438 | 0.5666 | 0.5987 | 0.6131 | 0.6367 | 0.6605 |

(b)

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0.01746 | 0.03492 | 0.05241 | 0.07154 | 0.08749 | 0.10510 | 0.12278 | 0.14054 | 0.15838 |

(c)

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1.733 | 1.822 | 1.916 | 2.100 | 2.117 | 2.226 | 2.340 | 2.460 |

(d)

| $x$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-x}$ | 1.000 | 0.905 | 0.819 | 0.741 | 0.640 | 0.607 | 0.549 | 0.497 |

*Ans.* (b) $y_4 = 0.06993$. (d) $e^{-0.4} = 0.670$.

الأجوبة

**2.26** أعطيت قيم $\tan x$ للفترة التالية $x = 23°(1°)(28°)$ استخدم صيغة استرلنك للاستكمال لحساب القيم التالية لخمسة أرقام معنوية

(a) $\tan 23°15'$. (b) $\tan 27°13'$.

*Ans.* (a) $\tan 23°15' = 0.42963$.

2.27 اعطيت $\sin x$ لقيم $x$ التالية $x = 5°(5°)30°$ استخدم صيغة استرلنك للاستكمال لحساب ما يأتي لخمسة أرقام معنوية

(a) $\sin 5°14'$. (b) $\sin 25°25'$. (c) $\sin 17°30'$.

(b) $\sin 25°25' = 0.42920$.

2.28 استخدم طريقة استكمال لكرانج لحساب قيم الدوال المعرفة بالجداول التالية :

(a)

| $x$ | 0 | 1.2 | 2.5 | 4.0 | 5.1 | 6.0 | 6.5 | 7.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.00 | 6.84 | 14.25 | 27.00 | 39.21 | 51.00 | 58.25 | 66.00 |

$f(2.00)$; $f(4.50)$; $f(6.30)$.

(b)

| $x$ | 0 | 1.4 | 2.5 | 3.8 | 5.4 | 6.0 | 6.7 | 7.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5.00 | 1.36 | 1.25 | 4.24 | 7.56 | 17.00 | 23.09 | 26.00 |

$f(2.00)$; $f(3.00)$; $f(6.40)$.

الأجوبة
(a) $f(2.00) = 11.00$; $f(6.30) = 55.25$.
(b) $f(3.00) = 2.00$.

2.29 جد مشتقات دالة بسل ( Bessel ) $J_0(x)$ عند النقاط المؤشرةأزاء كل منها مع الأخطاء المؤشرةأمام كل منها وذلك باستخدام الحد الأول من مفكوك متسلسلة الفروق التراجعية . الفروق الأمامية . الفروق المركزية .

| $x$ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $J_0(x)$ | 1.0000 | 0.9975 | 0.9900 | 0.9776 | 0.9604 |

(a) $\left.\frac{dJ_0}{dx}\right]_{x=0.1}$; $e = 0(h^2)$. (b) $\left.\frac{d^2J_0}{dx^2}\right]_{x=0.1}$; $e = 0(h)$.

(c) $\left.\frac{d^2J_0}{dx^2}\right]_{x=0.1}$; $e = 0(h^2)$. (d) $\left.\frac{d^4J_0}{dx^4}\right]_{x=0.2}$; $e = 0(h^2)$.

(e) $\left.\frac{d^3J_0}{dx^3}\right]_{x=0}$; $e = 0(h)$. (f) $\left.\frac{d^2J_0}{dx^2}\right]_{x=0.4}$; $e = 0(h)$.

(g) $\left.\frac{dJ_0}{dx}\right]_{x=0.4}$; $e = 0(h)$.

الأجوبة *Ans.* (a) −0.0500. (c) −0.5000. (e) 0.1000. (g) −0.1720.

2.30 جد المشتقات التالية لدالة بسل $Y_1(x)$ عند النقاط المؤشرة أزاء كل منها مع اخطاء ها المؤشرة وذلك باستخدام الحد الأول من مفكوكات فروقها التراجعية والأمامية والمركزية :

| $x$ | 6.0 | 6.1 | 6.2 | 6.3 | 6.4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1(x)$ | 0.1750 | −0.1998 | −0.2223 | −0.2422 | −0.2596 |

(a) $\left.\frac{d^4Y_1}{dx^4}\right]_{x=6.2}$; $e = 0(h^2)$.

(b) $\left.\frac{dY_1}{dx}\right]_{x=6.0}$; $e = 0(h)$.

(c) $\left.\frac{d^3Y_1}{dx^3}\right]_{x=6.3}$; $e = 0(h)$.

(d) $\left.\frac{d^2Y_1}{dx^2}\right]_{x=6.3}$; $e = 0(h^2)$.

(e) $\left.\frac{dY_1}{dx}\right]_{x=6.4}$; $e = 0(h)$.

الأجوبة *Ans.* (b) −0.2480. (d) 0.2500.

2.31 جد تعبيراً مقرباً للمشتقات التالية عند النقاط المؤشرة ازاء كل منها استخدم صيغة النقاط الموزعة توزيعاً غير منتظم مستخدماً الجدول التالي

| $x$ | 0.0 | 1.2 | 2.4 | 3.9 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3.41 | 2.68 | 1.37 | −1.48 |

(a) $y'\Big]_{x=2.4}$; $e = 0(h)$.

(b) $y'\Big]_{x=2.4}$; $e = 0(h^2)$.

(c) $y'\Big]_{x=1.2}$; $e = 0(h^2)$.

(d) $y''\Big]_{x=2.4}$; $e = 0(h)$.

(e) $y''\Big]_{x=2.4}$; $e = 0(h^2)$.

الأجوبة *Ans.* (b) −1.451. (d) −0.5988.

2.32 احسب المشتقات التالية عند النقاط المؤشرة أزاء كل منها مع الأخطاء ذات المراتب المبينة عندها وذلك باستخدام صيغة النقاط الموزعة توزيعاً غير منتظم .

| $x$ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.4 |
|---|---|---|---|---|
| $J_0(x)$ | 1.0000 | 0.9975 | 0.9900 | 0.9604 |

(a) $\left.\frac{dJ_0}{dx}\right]_{x=0.2}$; $e = 0(h^2)$.

(b) $\left.\frac{dJ_0}{dx}\right]_{x=0.2}$; $e = 0(h)$.

(c) $\left.\frac{d^2J_0}{dx^2}\right]_{x=0.2}$; $e = 0(h^2)$.

(d) $\left.\frac{d^2J_0}{dx^2}\right]_{x=0.2}$; $e = 0(h)$.

(e) $\left.\frac{d^2J_0}{dx^2}\right]_{x=0.1}$; $e = 0(h^2)$.

الأجوبة *Ans.* (a) $-0.0993$. (c) $-0.4900$. (e) $-0.5000$.

2.33 افرض ان متسلسلة الخطأ لمعادلة ما هي من المرتبة الرابعة $h^4$ وانه من الممكن الوقوف بعد الحد الثاني

$$e \doteq c_2h^4 + c_3h^6,$$

اشتق تعبيرا لمعاملات [ الذي يدعى استيفاء $(h^4,h^6)$ ] واحسب قيم هذه المعاملات لقيم $h$ تتناسب تناسبا عكسيا مع

(a) 3, 2, 1; (b) 4, 3, 2; (c) 5, 4, 3.

الاجوبة *Ans.*

$$K_{ijk} = \frac{n_k^6(n_j^2 - n_i^2)k_k - n_j^6(n_k^2 - n_i^2)k_j + n_i^6(n_k^2 - n_j^2)k_i}{n_k^6(n_j^2 - n_i^2) - n_j^6(n_k^2 - n_i^2) + n_i^6(n_k^2 - n_j^2)}.$$

2.34 احسب المشتقة الثانية لـ $J_0(x)$ عند $x = 0.2$ (a), $x = 0.5$ (b) بطريقة الفروق المركزية مع الخطأ من مرتبة $h^2$ مستخدما جدول تمرين 2.24(d) عندما $h = 0.2$ $h = 0.1$ استوف وقارن مع النتائج التي استخدمت في صيغة الفروق المركزية مع خطأ مرتبته $h^4$ وكان فيها $h = 0.1$

2.35 (a) احسب المشتقة الثانية للدالة $\sin x$ عند $x = \pi/4$ بطريقة مفكوك الفروق المركزية مع خطأ من مرتبة $h^2$ اولا $h^4$ ثانيا خذ $h = \pi/4, \pi/8, \pi/16$ وقارن مع القيم الحقيقية لها .

(b) احسب المشتقة الأولى للدالة $\sin x$ عند $x = \pi/4$ مستخدما الطريقة اعلاه مع الاخطاء التي ذكرت اعلاه لكن خذ $\pi/16$ $h = \pi/8$

الاجوبة

*Ans.* (a) $e = 0(h^2)$; $h = \pi/4$; $y'' = -0.67151$;
$h = \pi/8$; $y'' = -0.69813$;
$h = \pi/16$; $y'' = -0.70500$;
$e = 0(h^4)$; $h = \pi/8$; $y'' = -0.70702$;
$h = \pi/16$; $y'' = -0.70729$.

(b) $e = 0(h^2)$; $h = \pi/4$; $y' = 0.63662$;
$h = \pi/8$; $y' = 0.68908$;
$h = \pi/16$; $y' = 0.70257$;
$e = 0(h^4)$; $h = \pi/8$; $y' = 0.70656$;
$h = \pi/16$; $y' = 0.70707$.

2.36 اشتق صيغة التكامل معادلة (2.11.5) باستخدام متسلسلة تيلر .

2.37 اشتق صيغة السبع نقاط للتكامل مع خطأ من مرتبة $h^9$ بمتسلسلة تيلر قارنها مع المعادلة (2.11.6) صيغة ويدل Weddle .

2.38 انجز التكاملات التالية مستخدما قاعدة الشبه المنحرف مستعملاً قيم $n$ المؤشرة ازاء كل منها ثم استوف .

(a) $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$ $(n = 2,4,6)$.

(b) $\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx$ $(n = 2,4)$.

(c) $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ $(n = 2,4)$.

الاجوبة

*Ans.* (a) $n = 2$; 1.571; $n = 4$; 1.342; $n = 6$; 1.335; $n = 2, 4$; 1.266; $n=4, 6$; 1.330; true = 1.333. (c) $n = 2$; 0.877; $n = 4$; 0.881; $n = 2, 4$; 0.8823; true = 0.8821.

2.39 انجز التكاملات التالية مستخدما قاعدة سمبسون ذات الثلث لقيم $n$ المؤشر امامها ثم استوف .

(a) $\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx$ $(n = 2,4)$.

(b) $\int_2^6 x\sqrt{3 + 4x}\,dx$ $(n = 2,4)$.

(c) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$ $(n = 2,4)$.

(d) $\int_1^3 x^2 \sinh x\,dx$ $(n = 2,4)$.

(e) $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ $(n = 2,4,6)$.

(f) $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$ $(n = 2,4,6)$.

(g) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25 + x^2}}$ $(n = 2,4)$.

(h) $\int_0^4 \frac{dx}{(25 - x^2)^{3/2}}$ $(n = 2,4)$.

*Ans.* الاجوبة

(b) $A_2 = 71.702;$ $A_4 = 71.691;$ $A_{2,4} = 71.690;$ $A = 71.693.$

(d) $A_2 = 49.796;$ $A_4 = 48.464;$ $A_{2,4} = 48.375;$ $A = 48.371.$

(f) $A_2 = 2.094;$ $A_4 = 1.268;$ $A_6 = 1.330;$ $A_{2,6} = 1.3205;$* $A = 1.333.$

(h) $A_2 = 0.0577;$ $A_4 = 0.0541;$ $A_{2,4} = 0.0538;$ $A = 0.05333.$

**2.40** جد قيم التكاملات التالية مستخدماً قاعدة الشبه المنحرف لـ $n = 2$ و $n = 4$ ثم استوف

(a) $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx.$ (b) $\int_3^7 x^2 \log x\, dx.$

(c) $\int_1^{11} \sqrt{1 + x^2}\, dx.$ (d) $\int_0^{0.8} \cosh x^2\, dx.$

(e) $\int_3^7 \log x\, dx.$ (f) $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{16x - x^2}}$

(g) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x + 2}}$ (h) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$

(i) $4 \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$

الاجوبة

(b) $A_2 = 185.7090;$ $A_4 = 179.5385;$ $A_{2,4} = 177.4819;$ $A = 177.4836.$

(d) $A_2 = 0.848;$ $A_4 = 0.837;$ $A_{2,4} = 0.834.$

(f) $A_2 = 0.5275;$ $A_4 = 0.5244;$ $A_{2,4} = 0.5234;$ $A = 0.5236.$

(h) $A_2 = 0.9695;$ $A_4 = 0.9389;$ $A_{2,4} = 0.9286;$ $A = 0.9267.$

وبة

**2.41** جد قيم التكاملات التي جاءت في التمرين 2.40 مستخدماً طريقة سمبسون ذات $\frac{1}{3}$ واستوف لقيم $n = 2$ و $n = 4$ من الفترات الفرعية .

الاجوبة

(b) $A_2 = 177.454;$ $A_4 = 177.481;$ $A_{2,4} = 177.483.$

(d) $A_2 = 0.835;$ $A_4 = 0.834;$ $A_{2,4} = 0.834.$

(f) $A_2 = 0.5238;$ $A_4 = 0.5234;$ $A_{2,4} = 0.5234.$

(h) $A_2 = 0.9372;$ $A_4 = 0.9286;$ $A_{2,4} = 0.9280.$

(i) $A_2 = 3.1333;$ $A_4 = 3.1413;$ $A_{2,4} = 3.1419;$ $A = \pi.$

---

( ) طريقة الاستنفاذ $h^2$ و $h^4$ تستخدم فقط عندما تكون متوالية القيم مطردة فقط .

2.42 جد قيم التكاملات التي وردت في تمرين 2.38 بطريقة سمبسون $\frac{3}{8}$ لقيم $n = 3,6$ و واستوفها عندما تكون $A_{3,6} = A$ نافذة

الاجوبة

(a) $A_3 = 1.530; A_6 = 1.305; A = 1.333.$
(c) $A_3 = 0.8623; A_6 = 0.8820; A_{3,6} = 0.8886; A = 0.8821.$

2.43 جد قيم التكاملات التي وردت في تمرين 2.40 بطريقة سمبسون $\frac{3}{8}$ واستوفها لقيم $n = 3$ و $n = 6$ من الاجزاء .

الاجوبة

(b) $A_3 = 177.457; A_6 = 177.472; A_{36} = 177.477; A = 177.4836.$
(f) $A_3 = 0.5237; A_6 = 0.5236; A_{3,6} = 0.5236; A = 0.5236.$

2.44 جد قيم التكاملات التي وردت في تمرين 2.40 باستخدام المعادلة (2.11.5) عندما $n = 4$

الاجوبة

(b) $A_4 = 177.485.$ (f) $A_4 = 0.5236.$

2.45 جد قيم التكاملات التي وردت في تمرين 2.38 تبعاً لقاعدة ويدل عندما $n = 6$

الاجوبة

(a) $I = 1.343$

2.46 جد قيم التكاملات من $x_0$ الى $x_n$ للدوال المعرفة بالجدولين التاليين باستخدام المعادلة (2.12.1)

(a)

| $x$ | 0 | 1.2 | 2.5 | 4.0 | 5.1 | 6.0 | 6.5 | 7.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.00 | 6.84 | 14.25 | 27.00 | 39.21 | 51.00 | 58.25 | 66.00 |

(b)

| $x$ | 0.00 | 0.20 | 0.38 | 0.50 | 0.75 | 0.90 | 1.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6.00 | 5.24 | 4.62 | 4.25 | 3.56 | 3.21 | 3.00 |

الاجوبة

(b) $I = 4.34.$

2.47 جد التكاملات من $x_0$ الى $x_n$ للدوال التي وردت في تمرين 2.46(a) و(b) باستخدام المعادلة (2.12.2)

الاجوبة

(b) $I = 4.23$

# الفصل الثالث

# التكامل العددي لمسائل الشروط الابتدائية
# The Numerical Integration of Initial Value Problems

## 3.1 المقدمة :

خذ بنظر الاعتبار المعادلة التفاضلية ذات المرتبة $n$

$$y^{(n)}(x) = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \qquad (3.1.1)$$

والمحتوية على $n$ من الشروط الابتدائية في نقطة اختيرت بصورة كيفية كنقطة الاصل

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0; \quad \ldots; \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (3.1.2)$$

ان الحل العددي لهذه المعادلة يتكون من ايجاد قيم التكامل $y(x)$ عند نقاط منتظمة التوزيع بفواصل $h$ ضمن فترة تحديد الدالة . وتحسب هذه القيم خطوة فخطوة ابتداء من نقطة الشرط الابتدائي التي تؤخذ عادة كنقطة الاصل كما هو مبين في المعادلة (3.1.2) .

ان ايجاد قيم $y$ عند نقطة الارتكاز $x = ih$ ( $i =$ عدداً صحيحاً ) ينجز عادة بمعادلات المواترة *recurrence equations* حالما تكون معروفة في عدد محدد من النقاط السابقة $x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}$ .

ولغرض تطبيق هذه المعادلات يكون من الضروري ايجاد قيم $y(x)$ بصورة دقيقة في بضع النقاط الاولى ( واحدة الى اربعة ) ، ويتم هذا عادة باستخدام مفكوك متسلسلة تيلر ( Taylor expansion ) للدالة $y(x)$ .

## 3.2 اطلاق الحل بمتسلسلة تيلر :

***Starting the Solution by Taylor Series***

يمكن ايجاد قيم المشتقات المتتالية من مرتبة $n, n+1, n+2, \ldots$ للدالة $y$ في نقطة الاصل بواسطة المعادلتين (3.1.1) و (3.1.2) :-

$$y_0^{(n)} = f(0,y_0,y'_0,\ldots,y_0^{(n-1)})$$

$$y_0^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,y' + \frac{\partial f}{\partial y'}\,y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\,y^{(n)}\Big]_{x=0} \qquad (3.2.1)$$

$$y_0^{(n+2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\,y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\,y''^2 + \frac{\partial f}{\partial y'}\,y''' + \ldots\Big]_{x=0}$$

وبواسطة هذه المشتقات تسمح لنا الحدود الاولى من متسلسلة تيلر حول نقطه الاصل

$$y(x) = y_0 + \frac{y'_0}{1!}\,x + \frac{y''_0}{2!}\,x^2 + \frac{y'''_0}{3!}\,x^3 + \ldots \qquad (3.2.2)$$

بايـجاد قيمة $y$ في بضع نقاط الارتكاز الاولى . على شرط ان تكون $h$ صغيرة بما فيه الكفاية كي تكون المتسلسلة سريعة التقارب عند $x = ih\ (i = 1,2,\ldots,4)$

ليكن مثالنا معادلة الدرجة الاولى

$$y' = -\frac{0.9}{1 + 2x}\,y \qquad \text{(أ)}$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0 = 1. \qquad \text{(ب)}$$

ان القيم الابتدائية لمشتقات $y$ المتتالية هي

$$y'(0) = -0.9[(1 + 2x)^{-1}y]_{x=0} = -0.9;$$

$$y''(0) = -0.9[(1 + 2x)^{-1}y' - 2(1 + 2x)^{-2}y]_{x=0}$$

$$= -0.9(y'_0 - 2y_0) = +2.610;$$

$$y'''(0) = -0.9[(1 + 2x)^{-1}y'' - 4(1 + 2x)^{-2}y' + 8(1 + 2x)^{-3}y]_{x=0}$$

$$= -0.9(y''_0 - 4y'_0 + 8y_0) = -12.79;$$

$$y^{iv}(0) = -0.9[(1 + 2x)^{-1}y''' - 6(1 + 2x)^{-2}y'' + 24(1 + 2x)^{-3}y' - 48(1 + 2x)^{-4}y]_{x=0}$$

$$= -0.9(y'''_0 - 6y''_0 + 24y'_0 - 48y_0) = +88.24.$$

وبهذا تصبح الحدود الخمسة الاولى في مفكوك تيلر $y_T(x)$ للدالة $y(x)$ حول $x = 0$ على الصورة التالية :

$$y_T(x) = y_0 + \frac{y'_0}{1!}x + \frac{y''_0}{2!}x^2 + \frac{y'''_0}{3!}x^3 + \frac{y^{iv}_0}{4!}x^4$$
$$= 1 - 0.9x + 1.305x^2 - 2.132x^3 + 3.677x^4.$$

الجدول 3.1 يبين قيم مفكوك تيلر $y_T(x)$ لقيم $x = 0\ (0.02)\ 0.10$ وكذلك لقيم $x = 0.20, 0.30$ مع القيم المناظرة للدالة $y(x)$ والتي حصل عليها من تكامل المعادلة (a) بطريقة فصل المتغيرات .

$$\frac{dy}{y} = -0.9\frac{dx}{1+2x},$$
$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y} = \ln\frac{y}{y_0} = -0.9\int_0^x \frac{dx}{1+2x} = -0.45\ln(1+2x).$$
$$y(x) = (1+2x)^{-0.45}.$$

ويلاحظ ان هناك خطأ قدره $+1.27$ في قيمة $y_T(0.3)$

| $x$ | $y_T(x)$ | $y(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 0.02 | 0.9825 | 0.9825 |
| 0.04 | 0.9660 | 0.9660 |
| 0.06 | 0.9503 | 0.9503 |
| 0.08 | 0.9354 | 0.9354 |
| 0.10 | 0.9213 | 0.9212 |
| 0.20 | 0.8610 | 0.8595 |
| 0.30 | 0.8197 | 0.8094 |

جدول (١-٣)

وكمثال على الابتداء لمعادلة من المرتبة الثانية يؤخذ الرقاص الرياضي في الشكل 3.1 بنظر الاعتبار .

ان تذبذب رقاص رياضي . في الفراغ . يطلق من السكون عند $t = 0$ ومن زاوية $\theta_0$ يفي بشروط المعادلة التفاضلية . اللاخطية . المعروفة *

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \qquad (ج)$$

(*) انظر . مثلا . المعادلات التفاضلية . الفقرة 2.7

والشروط الابتدائية هي

$$\theta(0) = \theta_0; \qquad \dot{\theta}(0) = 0, \qquad (د)$$

حيث $\theta$ هي الزاوية بين الرقاص والاحداثي الشاقولي ، $t$ الزمن ، $g$ التعجيل الارضي ، $L$ هي طول الرقاص .

يمكن الحصول على حل محكم rigorous solution لمعادلة الشرط الابتدائي (ج) و (د) بدلالة دوال غير ابتدائية تدعى تكاملات القطوع الناقصة *elliptic Integrals.* وتظهر ان فترة تذبذب الرقاص هي

$$T = 4K\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad (e)$$

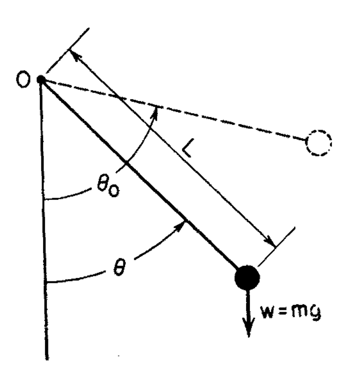
حيث $K$ هي تكامل القطع الناقص ، التام من الصنف الاول وهي مصنفة في جداول كتاب بيرس Peirce ، على سبيل المثال ، جدول قصير للتكاملات .

وعندما تكون $K(\theta_0/2) = 2.1565, \theta_0 = 120°$ وباعتبار $g = 32.2$ قدم/ ثانية $^2$ و $L = 3.22$ قد تكون فترة تدبدب الرقاص $T = 2.7276$ ثا

ولحل نفس المسألة بالطرق العددية تحول المعادلة الى صيغة لابعدية وذلك بجعل

$$t = \frac{T}{4}\tau; \qquad \therefore \qquad dt = \frac{T}{4}\,d\tau;$$

$$(dt)^2 = \left(\frac{T}{4}\right)^2 (d\tau)^2 = (0.6819)^2(d\tau)^2 = 0.46499 d\tau^2.$$




شكل ( ١-٣ )

(*) انظر . على سبيل المثال . المعادلات التفاضلية الفقرتين 9 .3 ، 9 4

ولكون $10^{-1}=g/L$ ثانية تصبح المعادلة ( ج ) بعد التعويض عن المتغيرات بصيغتها اللابعدية التالية :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} \equiv \ddot{\theta} = -4.6499 \sin \theta, \qquad (و)$$

بينما تتطلب الشروط الابتدائية كون

$$\theta(0) = \theta_0 = 120° = 2.0944 \text{ radians}; \qquad (ز)$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = 0,$$

حيث تعني النقاط المفاضلة بالنسبة الى $\tau$ . ومن المعادلة ( و ) ومشتقاتها نحصل على

$$\ddot{\theta}_0 = -4.6499 \sin \theta_0 = -4.0268;$$

$$\dddot{\theta}_0 = -4.6499 \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0 = 0;$$

$$\theta_0^{iv} = -4.6499(\cos \theta_0 \cdot \ddot{\theta}_0 - \sin \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0^2) = -9.3623,$$

ومن ثم تكون متسلسلة تيلر :

$$\theta(\tau) \doteq 2.0944 - 2.0134\tau^2 - 0.3901\tau^4. \qquad (ط)$$

الجدول 3.2 يدرج قيم $\theta$ المستخرجة من هذه المتسلسلة لقيم $\tau = 0(0.1)0.4$

جدول (٢-٣)

| $\tau = t/0.6819$ | $\theta$ | $\theta_L$ |
|---|---|---|
| 0 | 2.0944 | 2.0944 |
| 0.1 | 2.0742 | 2.0458 |
| 0.2 | 2.0132 | 1.9026 |
| 0.3 | 1.9100 | 1.6713 |
| 0.4 | 1.7623 | 1.3624 |

ان المعادلة الخطية . النافذة لقيم الزاوية $\theta$ الصغيرة بحيث يكون $\sin \theta \doteq \theta$ هي

$$\ddot{\theta} = -4.6499\theta$$

وتعطي الحل :

$$\theta_L(\tau) = 2.0944 \cos 2.1564\tau \qquad (ى)$$

ان قيم $\theta_L$ معطاة على سبيل المقارنة في العمود الثالث من الجدول 3.2

ان حل المسألة نفسها عندما يتذبذب الرقاص في محيط لزج . والذي لايمكن الوصول اليه بتكاملات القطوع الناقصة elliptic integrals لاينطوي على مزيد من الصعوبات حين تستعمل متسلسلة تيلر .

ان المعادلة التفاضلية لرقاص يتذبذب في محيط لزج تحتوي على حد تخامدي اضافي (damping term) . $\mu\, d\theta/dt$ حيث $\mu$ هي مقاومة الاحتكاك لكل وحدة كتلة . فاذا كانت $\mu = 0.5875\ \text{sec}^{-1}$ على سبيل المثال و $g/L = 10\ \text{sec}^{-2}$ كما في السابق . تتحول المعادلة ( ج ) الى المعادلة .

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0.5875\,\frac{d\theta}{dt} + 10\sin\theta = 0. \qquad (\text{ط})$$

فاذا ماجعلنا $t = (T/4)\tau = 0.6819\tau$ ثانية

( حيث $T$ هي فترة تذبذب الرقاص غير المتخامد تأخذ المعادلة ( ط ) الصيغة التالية :

$$\ddot\theta + 0.4\dot\theta + 4.6499\sin\theta = 0 \qquad (\text{ك})$$

بينما تبقى الشروط الابتدائية كما في المعادلات ( ز ) وباستعمال المعادلة ( ك ) ومشتقاتها المتتالية

$$\ddot\theta_0 = -0.4\dot\theta_0 - 4.6499\sin\theta_0 = -4.0268;$$

$$\dddot\theta_0 = -0.4\ddot\theta_0 - 4.6499\cos\theta_0\cdot\dot\theta_0 = 1.6107;$$

$$\theta_0^{\text{iv}} = -0.4\dddot\theta_0 - 4.6499\cos\theta_0\cdot\ddot\theta_0 + 4.6499\sin\theta_0\cdot\dot\theta_0^2 = -10.006,$$

يتم الحصول على حل متسلسلة تيلركما في السابق

$$\theta(\tau) = 2.0944 - 2.0134\tau^2 + 0.2685\tau^3 - 0.4169\tau^4, \qquad \ldots (\text{ل})$$

والتي يظهر حلها في الجدول 3.3 لقيم $\tau = 0(0.1)0.4$

(*) انظر *Differential Equations*, Sec. 2.7

| $\tau$ | $\theta$ | $\theta_L$ | $\dot{\theta}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2.0944 | 2.0944 | 0 |
| 0.1 | 2.0745 | 2.0465 | −0.3963 |
| 0.2 | 2.0153 | 1.9076 | −0.7865 |
| 0.3 | 1.9171 | 1.6875 | −1.1806 |
| 0.4 | 1.7788 | 1.3994 | −1.5886 |

جدول 3.3

ان حل المعادلة الخطية المناظرة لها

$$\ddot{\theta} + 0.4\dot{\theta} + 4.64999\theta = 0 \qquad (ن)$$

الجذور المميزة ينقضها characteristic roots هو : 0.2 ± 2.1471

$$\theta_L(\tau) = e^{-0.2\tau}(2.0944 \cos 2.1471\tau + 0.1951 \sin 2.1471\tau) \qquad (س)$$

ويظهر في العمود الثالث من الجدول 3.3

ويحوي العمود الرابع من الجدول على قيم $\dot{\theta}$ التي ستستعمل في جزء لاحق والتي حصل عليها بمفاضلة المعادلة ( ل ) :

$$\dot{\theta} = -4.0268\tau + 0.8054\tau^2 - 1.6677\tau^3,$$

ان الطرق التي استعملت في هذا الجزء على معادلات تفاضلية من درجات واطئة يمكن توسيعها الى معادلات من اي درجة وهي ذات قيمة عملية في تعيين الحل في جوار neighborhood ) نقطة الاصل ( أو نقطة الشرط الابتدائي وبازدياد المسافة من نقطة الاصل تقل دقة حل متسلسلة تيلر ويتعين استعمال عدد أكبر من حدود متسلسلة تيلر للحصول على دقة محددة .

وحيث ان هذا قد يكون بالغ الارهاق ، يغدو اكثر عمليا ان يتم تمديد( prolong ) الحل بطرق اخرى بعضها موضح في الفقرات التالية :

## 3.3 طرق أويلر للتكاملات الامامية :

***Euler Forward Integration Methods***

هناك طريقة ابتدائية لتكامل معادلات الدرجة الاولى خطوة فخطوة . تعود الى اويلر. لها فائدة محدودة بسبب دقتها الواطئة غير انها مفيدة في توضيح عمليات التكاملات الامامية وهي لاتحتاج الى اطلاق الحل.

لنأخذ مسألة الشرط الابتدائي

$$y' = f(x,y); \qquad y(0) = y_0, \qquad (3.3.1)$$

يمكن حساب التغير $\Delta y_i$ لكل خطوة بالمعادلة :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_i,y_i)h. \qquad (3.3.2)$$

ويوضح الجدول 3.4 تطبيق المعادلة ( 3.3.2 ) لمسألة المعادلتين (أ) و(ب) من الفقرة 3.2 .

جدول ( ٤-٣ )

| $x$ | $y_i$ | $f_i$ | $\Delta y_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | −0.9000 | −0.0180 |
| 0.02 | 0.9820 | −0.8498 | −0.0170 |
| 0.04 | 0.9650 | −0.8042 | −0.0161 |
| 0.06 | 0.9489 | −0.7625 | −0.0153 |
| 0.08 | 0.9336 | −0.7243 | −0.0145 |
| 0.10 | 0.9191 | −0.6893 | −0.0689 |
| 0.20 | 0.8402 | −0.5401 | −0.0540 |
| 0.30 | 0.7862 | | |

ان قيمة y عند $x = 0.10$ فيها خطأ مقداره 0.24 بالمائة . وتلك عند $x = 0.3$ فيها خطأ مقداره 2.86 بالمائة.

ان الخطأ في طريقة اويلر هو من مرتبة $h^2$ حيث ان الطريقة تستعمل الحد الاول فقط من الطرف الايمن للمعادلة (2.11.1) . ويمكن تحسين دقة طريقة أويلر بأستعمال المعادلة ( 3.3.2 ) لحساب $y_{i+1}$ اولا ، ثم $y'_{i+1}$ من المعادلة ( 3.3.1 ) ومن ثم يتم حساب $\Delta' y_i$ مصححة باستعمال متوسط $y'_i$ و $y'_{i+1}$ في المعادلة (3.3.2 ) أي بقانون الشبه المنحرف . وعليه يكون :

$$\Delta' y_i = \frac{h}{2}\,[f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1})]. \qquad (3.3.3)$$

وفي هذه الحالة تسمى المعادلة ( 3.3.2 ) بالمنبىء والمعادلة ( 3.3.3 ) بالمصحح لطريقة أويلر المحورة . ان الخطأ في هذه الطريقة هو من مرتبة $h^3$ حيث انها تستند على المعادلة ( 2.11.3 ) لقانون الشبه المنحرف

الجدول ( 3.5 ) يبين تطبيق هذه الطريقة على مسألة الجدول ( 3.4 ) نفسها.

جدول ( ٥-٣ )

| $x_i$ | $y_i$ | $f_i$ | $\Delta y_i$ | $y_{i+1}$ | $f_{i+1}$ | $\Delta' y_i$ | $\frac{-0.9}{1+2x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | −0.90000 | −0.0180 | 0.9820 | −0.8498 | −0.0175 | −0.9000 |
| 0.02 | 0.9825 | −0.8503 | −0.0170 | 0.9655 | −0.8046 | −0.0165 | −0.8654 |
| 0.04 | 0.9660 | −0.8050 | −0.0161 | 0.9499 | −0.7633 | −0.0157 | −0.8333 |
| 0.06 | 0.9503 | −0.7637 | −0.0153 | 0.9350 | −0.7255 | −0.0149 | −0.8036 |
| 0.08 | 0.9354 | −0.7258 | −0.0145 | 0.9209 | −0.6907 | −0.0142 | −0.7759 |
| 0.10 | 0.9212 | −0.6909 | −0.0691 | 0.8521 | −0.5478 | −0.0619 | −0.7500 |
| 0.20 | 0.8593 | −0.5524 | −0.0552 | 0.8041 | −0.4523 | −0.0502 | −0.6429 |
| 0.30 | 0.8091 | | | | | | −0.5625 |

وهنا يصبح الخطأ عند $x=0.10$ صفرا وذاك عند $x = 0.3$ مقداره 0.04 بالمائة فقط .

## 3.4 طريقة ملني *Milne's Method*

ان طريقة ملني . والتي تعتمد المنبىء – المصحح لمعادلات الدرجة الاولى . ذات خطأ من مرتبة $h^5$ وتتطلب معرفة قيم $y$ و $y'$ في نقاط الارتكاز الاربعة الاولى لغرض الانطلاق.

لنأخذ المعادلة مع قيم الارتكاز المطلوبة

$$y' = f(x,y); \qquad y_0, y_1, y_2, y_3; \qquad f_0, f_1, f_2, f_3, \qquad (3.4.1)$$

وبتحويل المعادلة (2.10.3) ، خطوة واحدة الى اليسار نحصل على :

$$B_4 = y_{i+1} - y_{i-3} = \int_{x_i-3}^{x_i+1} f(x,y)\,dx = \frac{4h}{3}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i) + \frac{14}{15}h^5 f^{iv}(\xi), \qquad (a)$$

يحسب المنبىء في طريقة ملني

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i), \qquad (3.4.2)$$

والتي بواسطتها يتم حساب $f_{i+1}$ من المعادلة ( 3.4.1 ) ثم تحسب قيمة $y_{i+1}$ المصححة باستعمال قانون سمبسون الثلثي :

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}), \qquad (3.4.3)$$

حيث الخطأ فيها $-\frac{h^5}{90}f^{iv}(\xi)$

والجدول 3.6 يعطينا التكامل من $x = 0$ الى $x = 2.4$ للمعادلة

(ب) $$y' = x + y; \qquad y_0 = 0$$

والتي حسبت قيمها الثلاثة الاولى بمسلسلة تيلر وبفترة $h = 0.3$ تظهر القيمة الصحيحة للدالة $y = e^x - (1 + x)$ في العمود الرابع .

جدول ( ٦-٣ )

| $x_i$ | $y_{i,p}$ | $f_{i,p}$ | $y_{i,c}$ | $f_{i,c}$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 0.000 | 0.000 |
| 0.3 | | | | 0.350 | 0.050 |
| 0.6 | | | | 0.822 | 0.222 |
| 0.9 | | | | 1.460 | 0.560 |
| 1.2 | 1.119 | 2.319 | 1.119 | 2.319 | 1.119 |
| 1.5 | 1.979 | 3.479 | 1.982 | 3.482 | 1.981 |
| 1.8 | 3.248 | 5.048 | 3.249 | 5.049 | 3.249 |
| 2.1 | 5.062 | 7.162 | 5.066 | 7.166 | 5.066 |
| 2.4 | 7.618 | 10.018 | 7.622 | | 7.623 |

## 3.5 طريقة آدامز *Adams's Method*

ان مواصلة الحل الذي بوشر به بمتسلسلة تيلر يمكن ان يتم بواسطة معادلة ادامز المتواترة التي تعتمد على الفروق الخلفية ( التراجعية ).

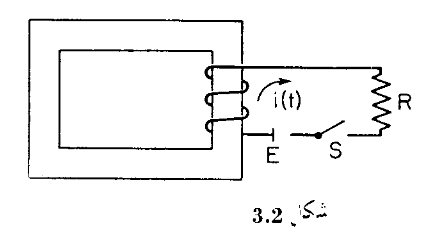
وللحصول على معادلة آدامز هذه . يتم التعويض عن المشتقات في مفكوك متسلسلة تيلر للمعادلة ( 2.11.1 ) بما يقابلها من الفروق الخلفية ( التراجعية ) الواردة في المعادلتين (2.4.16) , (2.4.17)

$$y_{i+1} = y_i + h[f_i + \tfrac{1}{2}(\nabla + \tfrac{1}{2}\nabla^2 + \tfrac{1}{3}\nabla^3 + \tfrac{1}{4}\nabla^4 + \tfrac{1}{5}\nabla^5 + \dots)f_i$$
$$+ \tfrac{1}{6}(\nabla^2 + \nabla^3 + \tfrac{11}{12}\nabla^4 + \tfrac{5}{6}\nabla^5 + \dots)f_i$$
$$+ \tfrac{1}{24}(\nabla^3 + \tfrac{3}{2}\nabla^4 + \tfrac{7}{4}\nabla^5 + \dots)f_i + \tfrac{1}{120}(\nabla^4 + 2\nabla^5 + \dots)f^i$$
$$+ \tfrac{1}{720}(\nabla^5 + \dots)f_i + \dots]$$

أو $$y_{i+1} = y_i + h[1 + \tfrac{1}{2}\nabla + \tfrac{5}{12}\nabla^2 + \tfrac{3}{8}\nabla^3 + \tfrac{251}{720}\nabla^4 + \tfrac{95}{288}\nabla^5 + \dots]f_i. \quad (3.5.1)$$

ان عدد الحدود التي تؤخذ بنظر الاعتبار في متسلسلة المعادلة ( 3.5.1 ) يعتمد على عدد قيم نقاط الاوتكاز المحسوبة بمتسلسلة تيلر وعلى الدقة المبتغاة في الحل.

ولتوضيح استعمال معادلة آدامز تؤخذ الدائرة الكهربائية في الشكل 3.2




شكل 3.2

تحتوي الدائرة على ملف ( coil ) مع لب حديدي ( core ) ذي منحني مغناطيسي معادلته :

$$Ni = 0.6\phi + 0.0033 \times 10^{10}\phi^3,$$

حيث تمثل $\phi$ التدفق ( flux ) في اللب ( بالكيلوخط ) . $N$ عدد اللفات في الملف و $i$ التيار ( بالامبير ) الذي يسبب التدفق وعند تطبيق قانون كيرشهوف للجهد على الدائرة نحصل على

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} = Ri + N\frac{d\phi}{dt}.$$

ووحدة التدفق هنا هي الويبر (webers) . ( أي $10^5$ كيلوخط ) . و $t$ بالثواني ولدى التعويض من المعادلة (أ) نحصل على

$$E = \frac{R}{N}(0.6\phi + 0.0033\phi^3) + N\frac{d\phi}{dt} \cdot 10^{-5}, \qquad **$$

حيث وحدات $\phi$ هنا هي كيلو خط ، وبجعل الجهد $E = 18$فولت ، $N = 100$
$R = 300$ ** أوم و $t$ مليثانية يكون التدفق منظما بالمعادلة اللاخطية التالية

$$\frac{d\phi}{dt} + 1.8\phi + 0.01\phi^3 = 18. \qquad (ب)$$

فاذا ماكان المفتاح (د) قد اغلق عند $t = 0$ ، تتطلب الشروط الابتدائية كون ان التدفق $\phi$ يتقارب تلامسيا approaches asymptotically من قيمته العظمى $\phi_m$ بازدياد $t$ ، ولذا فان $\phi_m$ تحدد كون $d\phi/dt = 0$ وحسب المعادلة (ب) فانها جذر للمعادلة التالية :

$$0.01\phi^3 + 1.8\phi - 18 = 0.$$

ان الجذر الحقيقي الوحيد لهذه المعادلة يساوي 7.5802 ولذا فان $\phi_m = 7.5802$

لاختزال المعادلة (ب) الى صيغة لابعدية نجعل :

$$\phi(t) = \phi_m y(t), \qquad (د)$$

ونقتني المعادلة للدالة اللابعدية $y(t)$

$$\phi_m \dot{y} = 18 - 1.8\phi_m y - 0.01\phi_m^3 y^3,$$

حيث تعني $\dot{y}$ المشتقة $dy/dt$ وبتعويض قيمة $\phi_m = 7.5802$ تصبح المعادلة أخيرا

$$\dot{y} = 2.3746 - 1.8y - 0.5746y^3, \qquad (هـ)$$

بينما يتطلب الشرط الابتدائي ان يكون :

$$y(0) = 0. \qquad (و)$$

ولاطلاق حل معادلة الشرط الابتدائي (هـ)، (و) نفاضل المعادلة (هـ) تفاضلا متتاليا للحصول على

$$\dot{y}_0 = 2.3746;$$
$$\ddot{y}_0 = -1.8\dot{y}_0 - 0.5746 \cdot 3y_0^2\dot{y}_0 = -4.2743;$$
$$\dddot{y}_0 = (-1.8 - 0.5746 \cdot 3y_0^2)\ddot{y}_0 - 0.5746 \cdot 6y_0\dot{y}_0^2 = 7.6937;$$
$$y_0^{iv} = (-1.8 - 0.5746 \cdot 3y_0^2)\dddot{y}_0 - 0.5746 \cdot 6(3y_0\ddot{y}_0 + \dot{y}_0^2)\dot{y}_0 = -60.011;$$
$$y_0^{v} = (-1.8 - 0.5746 \cdot 3y_0^2)y_0^{iv} - 0.5746 \cdot 6(4y_0\dot{y}_0\dddot{y}_0 + 3y_0\ddot{y}_0^2 + 6\dot{y}_0^2\ddot{y}_0)$$
$$= 606.58.$$

** وردت المقاومة على انها 3000 أوم خطأ في الأصل الانكليزي وبدلت الى 300 هنا لكي تنسجم مع المعادلة (ب)

وبالقيم اعلاه للمشتقات عند $x = 0$ تصبح متسلسلة تيلر للدالة $y(t)$ :

$$y(t) = 2.3746t - 2.1372t^2 + 1.2823t^3 - 2.5005t^4 + 5.0548t^5$$

وتعطى القيم في الجدول 3.7 لقيم $t = 0(0.05)0.20$ وكذلك $t = 0.30$. يحتوي العمود الثالث من الجدول على القيم التقريبية $y_L(t)$ للدالة $y(t)$ الناتجة عن جعل المعادلة (هـ) خطية . أي باهمال الحد التكعيبي $-0.5746y^3$ . ويختصر الحل في هذه الحالة الى

$$y_L(t) = 1.3192(1 - e^{-1.8t}). \qquad (ز)$$

وبعد الحصول على القيم في الجدول 3.7 تستعمل صيغة أدامز لتمديد الحل .

ان الاسطر الاربعة الاولى من الجدول ( 3.8 ) تحتوي على : (أ) قيم $y$ ، $y^3$ عند قيم $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ والتي أخذت من الجدول ( 3.7 ) . (ب) قيم $f(x = y)$* $\dot{y} =$ المعطاة بالمعادلة (هـ) للنقاط نفسها و (ج) قيم الفروق الخلفية الثلاثة الاولى للدالة

جدول ( ٧-٣ )

| $t$ | $y(t)$ | $y_L(t)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0.05 | 0.1135 | 0.1136 |
| 0.10 | 0.2172 | 0.2173 |
| 0.15 | 0.3116 | 0.3121 |
| 0.20 | 0.3973 | 0.3988 |
| 0.30 | 0.5476 | 0.5505 |

جدول ( ٨-٣ )

| $i$ | $t$ | $y_i$ | $y_i^3$ | $f_i$ | $\nabla f_i$ | $\nabla^2 f_i$ | $\nabla^3 f_i$ | $y_L$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 2.3746 | | | | 0 |
| 1 | 0.1 | 0.2172 | 0.0103 | 1.9777 | −0.3969 | | | 0.2173 |
| 2 | 0.2 | 0.3973 | 0.0627 | 1.6234 | −0.3543 | 0.0426 | | 0.3988 |
| 3 | 0.3 | 0.5476 | 0.1642 | 1.2946 | −0.3288 | 0.0255 | −0.0171 | 0.5505 |
| 4 | 0.4 | 0.6610 | 0.2888 | 1.0189 | −0.2757 | 0.0531 | 0.0276 | 0.6770 |
| 5 | 0.5 | 0.7523 | 0.4258 | 0.7758 | −0.2431 | 0.0326 | −0.0205 | 0.7828 |
| 6 | 0.6 | 0.8183 | 0.5479 | 0.5868 | −0.1890 | 0.0541 | 0.0215 | 0.8712 |
| 7 | 0.7 | 0.8706 | 0.6598 | 0.4284 | −0.1584 | 0.0306 | −0.0235 | 0.9449 |
| 8 | 0.8 | 0.9059 | 0.7435 | 0.3168 | −0.1116 | 0.0468 | 0.0162 | 1.0067 |
| 9 | 0.9 | 0.9346 | 0.8164 | 0.2232 | −0.0936 | 0.0180 | −0.0288 | 1.0581 |
| 10 | 1.0 | 0.9519 | | | | | | 1.1011 |
| | ∞ | 1.0000 | | | | | | 1.3192 |

(*) يلاحظ ان المعادلة التفاضلية في المسألة الحالية تأخذ الصيغة $\dot{y} = f(y)$ وذلك لعدم ظهور المتغير المستقل في الدالة $f$.

ان صيغة آدامز . المقطوعة بعد حدها الرابع ، ولفترة $h = .1$ تأخذ الشكل التالي :

$$y_{i+1} = y_i + 0.1[f_i + \tfrac{1}{2}\nabla f_i + \tfrac{5}{12}\nabla^2 f_i + \tfrac{3}{8}\nabla^3 f_i], \qquad \text{(h)}$$

وتسمح بتعيين قيم $y_4$ عند $t = 0.4$ بدلالة $f, y$ وفروقها عند $t = .3$ وحالما يتم حساب $y_4$ . تحسب قيمة $f_4$ بالمعادلة (هـ) ثم تحسب فروقها الخلفية (التراجعية) بمساعدة الجدول ( 3.8 ) ثم تستعمل المعادلة (ح) لحساب $y_5$ وهلم جرا . ان قيم المرتكزات لحد $y_{10}$، والتي حصل عليها خطوة فخطوة ، مدونة في الجدول 3.8.

ان العمود المعنون $y_L$ من الجدول ( 3.8 ) يحتوي ( لغرض المقارنة) على حل الصيغة الخطية للمسألة نفسها محسوبا من المعادلة (ز).

ان الحل المحكم rigorous للمعادلات (هـ)، (و) قد نحصل عليه بطريقة فصل المتغيرات* والتي تعطي $t$ بدلالة $y$ بالشكل التالي :

$$t = 0.2838\left[-\ln(1-y) + \tfrac{1}{2}\ln\frac{y^2+y+4.1326}{4.1326} + 0.7613\left(\tan^{-1}\frac{2y+1}{3.9409} - \tan^{-1}0.2537\right)\right]. \qquad \text{(ط)}$$

وبواسطة هذا الحل نجد انه عندما تكون $y = 0.7523$ تكون قيمة $t$ هي 0.5040 عوضا عن 0.5 كما هو مبين في الجدول 3.8 وكذلك فلقيمة $y = 0.9519$ تساوي 0.9974 $t$ عوضا عن 1.0000

وبالعكس فان الاستكمال من الجدول ( 3.8 ) بمعادلة كريكورى – نيوتن للاستكمال الامامي المعادلة (2.6.1) يعطينا القيم المدونة في الجدول ( 3.9 ) والتي تعني $y_i$ فيه قيم $y$ المستكملة . وتعني $y$ القيم الصحيحة كما تعني $\epsilon$ النسبة المئوية للخطأ .

جدول 3.9

| $t$ | 0.5040 | 0.9974 |
|---|---|---|
| $y_i$ | 0.7552 | 0.9513 |
| $y$ | 0.7523 | 0.9519 |
| $\epsilon(\%)$ | 0.38 | 0.06 |

---

(*) أنظر Diff-Eq.

ان هذه القيم لاتبين الاختلافات الصغيرة جدا بين القيم الصحيحة وتلك المستوفاة extrapolated بعد عشر خطوات من الحل فحسب ، وانما تبين ايضا انه في كثير من الحالات يكون حل المعادلة التفاضلية بالطرق العددية اكثر اقتصادا حتى ولو توفر الحل المحكم . ففي المثال الحالي تكون متابعة الحل كما في الجدول ( 3.8 ) أبسط بالتأكيد من أشتقاق الحل المحكم (ط) اولا ومن ثم ايجاد قيمه العددية. ان ايجاد قيم المعادلة (ط) مرهق اضافة الى كونه لايعطي قيم الارتكاز للمتغير

## 3.6 طريقة ( أويلر – فوكس للمعادلات الخطية )

***The Euler-Fox Method for Linear Equations***

ان هناك طريقة بسيطة وكفؤة للتكامل خطوة فخطوة ، تعود الى فوكس وتعتمد على طريقة اويلر التقليدية ، تسمح بتكامل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى دون الحاجة الى ا طلاق الحل بواسطة متسلسلة تيلر :

اعتبر معادلة اويلر المعدلة (3.3.3) :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[y'_i + y'_{i+1}] + \epsilon_{i+1}, \qquad (3.6.1)$$

where

$$\epsilon_{i+1} = -(\tfrac{1}{12}h^3y'''_i + \tfrac{1}{24}h^4y^{iv}_i + \tfrac{1}{80}h^5y^{v}_i + \ldots). \qquad (a)$$

ان الخطأ $\epsilon_{i+1}$ في المعادلة أ يمكن التعبير عنه بدلالة الفروق المركزية غير المعدلة ( *unaveraged* ) بالصيغة

$$\epsilon^{(n)}_{i+1} = -(\tfrac{1}{12}\delta^3 - \tfrac{1}{120}\delta^5 + \tfrac{1}{840}\delta^7 - \ldots)y^{(n)}_{i+\frac{1}{2}}\dagger \qquad (3.6.2)$$

وهو تصحيح فوكس لمعادلة اويلر المعدلة .

لهذا الغرض لاحظ ان الفروق المركزية غير المعدلة من الدرجة الفردية $2n+1$ $i+\frac{1}{2}$ قد تكتب أيضا كالفرق الامامي للفروق المركزية من الدرجة $2n$ عند $i$ لأن :

$$\delta^{2n+1}y_{i+\frac{1}{2}} = \Delta(\delta^{2n}y_i). \qquad (ب)$$

وكمثال

$$\delta^3y_{i+\frac{1}{2}} = \delta(\delta^2y_{i+\frac{1}{2}}) = \delta^2y_{i+1} - \delta^2y_i = \Delta(\delta^2y_i).$$

بواسطة التعابير الرمزية للفروق الامامية والمركزية غير المعدلة ( unaveraged ) المعادلات (2.7.11), (2.5.2)

$$\Delta = (e^{hD} - 1); \qquad \delta^{2n} = 2^{2n}\sinh^{2n}(hD/2),$$

---

† في هذا القسم وما يليه سيستعمل الرمز $y^{(n)}_i$ للدلالة على التقريب من المرتبة $n$ لقيمة $y$ عند النقطة.

يصبح الطرف الايسر من المعادلة (ب)

$$\delta^{2n+1} y_{i+1/2} = 2^{2n}(e^{hD} - 1)\sinh^{2n}(hD/2) y_i.$$

وتعويض هذه التعابير في المعادلة (3.6.2) يختزلها الى المعادلة (أ) فمثلا

$$\begin{aligned}\delta^3 y_{i+1/2} &= \left[2^2(e^{hD} - 1)\sinh^2\left(\frac{hD}{2}\right)\right] y_i \\ &= 2^2\left[hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \ldots\right]\left[\frac{h^2D^2}{4} + \frac{h^4D^4}{48} + \ldots\right] y_i \\ &= \left[h^3D^3 + \frac{h^4D^4}{2} + \frac{h^5D^5}{4} + \ldots\right] y_i;\end{aligned}$$

$$\delta^5 y_{i+1/2} = \left[h^5D^5 + \frac{h^6D^6}{2} + \ldots\right] y_i,$$

وبذلك تعطينا المعادلة (3.6.2)

$$\begin{aligned}\epsilon_{i+1} &= -\left[\frac{1}{12}\left(h^3D^3 + \frac{h^4D^4}{2} + \frac{h^5D^5}{4} + \ldots\right) - \frac{1}{120}(h^5D^5 + \ldots) + \ldots\right] y_i \\ &= -\left(\frac{1}{12}h^3D^3 + \frac{1}{24}h^4D^4 + \frac{1}{80}h^5D^5 + \ldots\right) y_i,\end{aligned}$$

والتي هي مطابقة للمعادلة (أ)

وستستعمل معادلة اويلر المعدلة مع تصحيح فوكس للحصول على قاعدة المواتـــرة ( recurrence formula ) لحل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الاولى.

لنأخذ المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{3.6.3}$$

وبالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0, \tag{3.6.4}$$

نجعل

$$x = ih; \quad f(x) = f_i; \quad f(x+h) = f_{i+1};$$
$$g(x) = g_i; \quad g(x+h) = g_{i+1}.$$

ان تعويض المعادلة (3.6.3) في المعادلة (3.6.1) يعطي

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_i y_i + g_i + f_{i+1}y_{i+1} + g_{i+1}) + \epsilon_{i+1},$$

ولدى حل المعادلة اعلاه لقيمة $y_{i+1}$ نحصل على معادلة اويلر-فوكس المتواترة.

$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2}f_{i+1}}\left[\left(1 + \frac{h}{2}f_i\right) y_i^{(n)} + \frac{h}{2}(g_i + g_{i+1}) + \epsilon_{i+1}^{(n-1)}\right], \tag{3.6.5}$$

حيث الخطأ $\epsilon_{i+1}^{(n-1)}$ والمعطى بالمعادلة (3.6.2) هو من مرتبة $h^3$.

وستطبق معادلة اويلر–فوكس المتواترة لحل المسألة (a), (b) في القسم 3.2 والتي تنظم بالمعادلة .

$$y' = -\frac{0.9}{1+2z}y \qquad \text{(c)}$$

والشرط الابتدائي

$$y(0) = 1. \qquad \text{(د)}$$

باستعمال $h = 0.1$ لهذه الحالة

$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1-0.05f_{i+1}}[(1+0.05f_i)y_i^{(n)} + \epsilon_{i+1}^{(n-1)}]. \qquad \text{(هـ)}$$

ان قيم $y_i^{(1)}$ في العمود الثالث من الجدول 3.10 حسبت بواسطة المعادلة (هـ) انطلاقا من $y_0 = 1$ وباهمال التصحيح $\epsilon_{i+1}$ . ان قيمة $y(0.3)$ فيها خطأ مقداره 0.16 بالمائة.

ان الاعمدة المتتالية في الجدول 3.10 تحتوي على الفروق المركزية غير المعدلة ( unaveraged ) لـ $y_{i+½}$ التصحيح $\epsilon_{i+1}^{(1)}$ والقيمة التقريبية الثانية $y_i^{(2)}$ للمتغير $y$ محسوبة بالمعادلة (هـ) مع التصحيح . وحيث ان قيمة $\delta^3 y_{i+½}$ يمكن حسابها للنقطة $z = 0.15$ فقط ، فقد افترض ان الفرق الثالث ثابت وقيمته تساوي $-0.0056$ في جميع النقاط $i + \frac{1}{2}$ ومن ثم فان :

$$\epsilon_{i+1}^{(1)} \doteq -\tfrac{1}{12}\delta^3 y_{i+½} = -\tfrac{1}{12}\cdot 0.0056 = 0.0005,$$

مهما كانت $i$ . وكذلك

$$y_i^{(2)} = y_i^{(1)} + \frac{0.0005}{1-0.05f_{i+1}}.$$

ان القيمة الاخيرة $y^{(2)}(0.3)$ فيها خطأ قدرة 0.02 بالمائة فقط .

جدول ( ١٠-٣ )

| $z$ | $f_i$ | $y_i^{(1)}$ | $\delta y_{i+½}$ | $\delta^2 y_i$ | $\delta^3 y_{i+½}$ | $\frac{\epsilon_{i+1}^{(1)}}{1-0.05f_{i+1}}$ | $y_i^{(2)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −0.9000 | 1.0000 | | | | | 1.0000 |
| | | | −0.0795 | | (−0.0056) | +0.0005 | |
| 0.1 | −0.7500 | 0.9205 | | 0.0174 | | | 0.9210 |
| | | | −0.0621 | | −0.0056 | +0.0005 | |
| 0.2 | −0.6428 | 0.8584 | | 0.0118 | | | 0.8594 |
| | | | −0.0503 | | (−0.0056) | +0.0005 | |
| 0.3 | −0.5625 | 0.8081 | | | | | 0.8096 |

## 3.7 حل المعادلات الآنية من المرتبة الاولى:

***The Solution of Simultaneous First-order Equations***

ان معادلة آدامز (3.5.1) قد تستعمل بيسر لحل منظومة معادلات آنية من الدرجة الاولى . لنأخذ الحالة البسيطة لمعادلتين آنيتين :

$$y' = f(x,y,z); \qquad z' = \phi(x,y,z), \qquad (3.7.1)$$

حيث أن $y$ ، $z$ هما بدلالة نفس المتغير المستقل $x$ وبالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0; \qquad z(0) = z_0. \qquad (3.7.2)$$

وبتطبيق صيغة آدامز على المعادلتين . نحصل على معادلتي التواتر

$$y_{i+1} = y_i + h[1 + \tfrac{1}{2}\nabla + \tfrac{5}{12}\nabla^2 + \ldots]f_i;$$
$$z_{i+1} = z_i + h[1 + \tfrac{1}{2}\nabla + \tfrac{5}{12}\nabla^2 + \ldots]\phi_i, \qquad (3.7.3)$$

لتي يمكن استعمالها حالما يتم الحصول على قيم ابتدائية كافية بمتسلسلة تيلر.

كمثال نأخذ الحالة المبسطة للمعادلتين الآنيتين :

$$y' = f(x,y,z) = z; \qquad z' = \phi(x,y,z) = y \qquad (a)$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0 = 1; \qquad z(0) = z_0 = 2 \qquad (b)$$

اللتين تعطيان بالتفاضل

$$y_0 = 1; \qquad z_0 = 2,$$
$$y_0' = z_0 = 2; \qquad z_0' = y_0 = 1,$$
$$y_0'' = z_0' = 1; \qquad z_0'' = y_0' = 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وبذلك تكون متسلسلة تيلر .

$$y = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \ldots; \qquad z = 2 + x + x^2 + \ldots.$$

ومن هذه المتسلسلة نحصل على قيم $y, \nabla y, \nabla^2 y, z, \nabla z, \nabla^2 z$

والتي تشكل الاسطر الثلاثة الاولى من الجدول ( 3.11 ) لقيم $x = 0, 0.1, 0.2$ ومن ثم نحسب قيم $y$ ، $z$ عند $x = 0.3$ ، $0.4$ بواسطة المعادلة (3.7.3) باعتبار $\phi = y$ ، $f = z$, $h = 0.1$ ان القيم الصحيحة للمتغيرين $y$ ، $z$ عند $x = 0.4$ هي 2.573, 1.903 على التوالي

جدول (١١-٣)

| $x$ | $y$ | $\nabla y$ | $\nabla^2 y$ | $z$ | $\nabla z$ | $\nabla^2 z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | 2 | | |
| 0.1 | 1.205 | 0.205 | | 2.110 | 0.110 | |
| 0.2 | 1.420 | 0.215 | 0.010 | 2.240 | 0.130 | 0.020 |
| 0.3 | 1.651 | 0.231 | 0.016 | 2.393 | 0.153 | 0.023 |
| 0.4 | 1.899 | 0.248 | 0.017 | 2.570 | 0.177 | 0.024 |

من الواضح ان هذه الطريقة يمكن تعميمها الى اي عدد من المعادلات الآنية وكذلك الى الطرق الاخرى من التكامل خطوة فخطوة .وبصورة خاصة فان طريقة اويلر – فوكس قد تعمم ايضا لحل المعادلة الآنية الخطية وللقارىء ان يشتق معادلات المواترة لمنظومة معادلتين آنيتين أو اكثر على نفس النهج المتبع في هذا القسم ( انظر المسألة ( 3.19 )

ان حل معادلة تفاضلية من المرتبة $n$

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}), \tag{3.7.4}$$

يؤول الى حل $n$ من المعادلات الآنية من الدرجة الاولى باجراء التعويضات

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x,y) \\ y'' &= f_1' = f_2(x,y,y') = f_2(x,y,f_1) \\ y''' &= f_2' = f_3(x,y,y',y'') = f_3(x,y,f_1,f_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= f_{n-1}' = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) = f(x,y,f_1,f_2,\ldots,f_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

وهكذا فأن اي طريقة لحل معادلات المرتبة الاولى قد تعمم لحل معادلات المرتبة $n$ .

## 3.8 طريقة ميلني *Milne* لمعادلات المرتبة الثانية :

***Milne's Method for Second-order Equations***

من السهل تمديد طريقة ميلني للمنبىء المصحح* لمعادلات المرتبة الاولى الى معادلات المرتبة الثانية .فباعطاء

$$y'' = f(x,y,y'); \qquad y(0) = y_0; \qquad y'(0) = y_0'. \tag{3.8.1}$$

المصحح

يطلق الحل بمتسلسلة تيلر للحصول على قيم الارتكاز الاربعة الاولى للمتـغيـــرات $y_i'' = f_i, y_i, y_i'$ . وباستعمال المعادلة (2.10.3) كمنبيء عند النقطة $i - 1$ نحصل على :

$$y'_{i+1} = y'_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}). \tag{3.8.2}$$

حيث ان معرفة قيمة $y'_{i+1}$ تسمح باستعمال قانون سمبسون الثلثي للتنبؤ بقيمة $y_{i+1}$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(y'_{i+1} + 4y'_i + y'_{i-1}). \tag{3.8.3}$$

ان قيمة $y''_{i+1} = f_{i+1}$ تقتنى من المعادلة التفاضلية بتعويض قيم $y'_{i+1}, y_{i+1}$

المتنبأ بهما كما تقتنى قيمة $y'_{i+1}$ المصححة بقانون سمبسون الثلثي

$$y'_{i+1} = y'_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}). \tag{3.8.4}$$

واخيرا تحسب قيمة $y_{i+1}$ المصححة بواسطة المعادلة (3.8.3) . ان العملية قد تعاود غير ان هذا نادرا مايكون ضروريا اذا ما اختيرت $h$ ملائمة من حيث الصغر.

يوضح الجدول ( 3.12 ) تطبيق طريقة ميلني لحل المسألة

$$y'' - \tfrac{3}{2}y' + \tfrac{1}{2}y = 0; \quad y_0 = 0; \quad y'_0 = 1. \tag{a}$$

حيث استعمل الحل التحليلي للمعادلة $y = 2(e^x - e^{x/2}),\ y' = 2e^x - e^{x/2}$ للحصول على قيم $y_i$ و $y'_i$ الاربعة الاولى . الجدول ( 3.12 ) . ان قيم $y$ الصحيحة في السطر الاخير.

جدول ( ١٢-٣ )

| $x$ | 0 | 0.3 | 0.6 | 0.9 | 1.2 | | 1.5 | | 1.8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $p$ | $c$ | $p$ | $c$ | $p$ | $c$ |
| $y$ | 0 | 0.3762 | 0.9444 | 1.7826 | 2.9957 | 2.9959 | 4.7285 | 4.7289 | 7.1790 | 7.1793 |
| $y'$ | 1.0 | 1.5380 | 2.9243 | 3.3509 | 4.8154 | 4.8167 | 6.8412 | 6.8451 | 9.6339 | 9.6369 |
| $y''$ | 1.5 | 2.1189 | 2.9692 | 4.1350 | 5.7252 | 5.7274 | 7.8976 | 7.9032 | 10.8614 | 10.8657 |
| | | | | $y$ | | 2.9960 | | 4.7294 | | 7.1800 |

## 3.9 طريقة آدامز – شتورمر لمعادلات المرتبة الثانية.

***The Adams-Störmer Method for Second-order Equations***

### (أ) المعادلة الكاملة

ان حل معادلة من المرتبة الثانية

$$y'' = f(x,y,y') \tag{3.9.1}$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0; \qquad y'(0) = y'_0 \tag{3.9.2}$$

يؤول الى تكامل معادلتين آنيتين من المرتبة الاولى بجعل

$$y' = z(x,y), \tag{3.9.3}$$

حيث تصبح المعادلة (3.9.1)

$$y'' = z' = f(x,y,z). \tag{3.9.4}$$

وبتطبيق معادلة آدامز (3.9.1) على معادلتي المرتبة الاولى (3.9.3) , (3.9.4) نحصل على معادلات المواترة

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + h[1 + \tfrac{1}{2}\nabla + \tfrac{5}{12}\nabla^2 + \ldots]f_i; \\ y_{i+1} &= y_i + h[1 + \tfrac{1}{2}\nabla + \tfrac{5}{12}\nabla^2 + \ldots]z_i. \end{aligned} \tag{3.9.5}$$

ويطلق الحل . كالعادة . بمتسلسلة تيلر ثم يتابع التكامل كما مبين في الجدول ( 3.13 ) حيث حسبت القيم اعلى الخط المزدوج من متسلسلة تيلر وتلك الى تحته بالمعادلة ( 3.9.5 ) متحركين من اليسار الى اليمين.

جدول (١٣-٣)

| $i$ | $x$ | $y$ | $z$ | $\nabla z$ | $\nabla^2 z$ | $\ldots$ | $f$ | $\nabla f$ | $\nabla^2 f$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i-2$ | $x_{i-2}$ | $y_{i-2}$ | $z_{i-2}$ | | | | $f_{i-2}$ | | | |
| $i-1$ | $x_{i-1}$ | $y_{i-1}$ | $z_{i-1}$ | $\nabla z_{i-1}$ | | | $f_{i-1}$ | $\nabla f_{i-1}$ | | |
| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $\nabla z_i$ | $\nabla^2 z_i$ | $\ldots$ | $f_i$ | $\nabla f_i$ | $\nabla^2 f_i$ | $\ldots$ |
| $i+1$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ | $z_{i+1}$ | $\nabla z_{i+1}$ | $\nabla^2 z_{i+1}$ | $\ldots$ | $f_{i+1}$ | $\nabla f_{i+1}$ | $\nabla^2 f_{i+1}$ | $\ldots$ |
| $i+2$ | $x_{i+2}$ | $y_{i+2}$ | $z_{i+2}$ | $\nabla z_{i+2}$ | $\nabla^2 z_{i+2}$ | $\ldots$ | $f_{i+2}$ | $\nabla f_{i+2}$ | $\nabla^2 f_{i+2}$ | $\ldots$ |

من الممكن الحصول على شيء من التبسيط في العملية ، حين تنتفي الحاجة للمشتقة $y'$ باختصار $z$ بين المعادلتين ( 3.9.5 ) وبذلك يوفر جهد ايجاد فروقها ، ولهذا الغرض ، نطبق المعادلة الثانية من ( 3.9.5 ) عند $y_i, y_{i+1}$

$$y_{i+1} - y_i = h[1 + \tfrac{1}{2}\nabla + \tfrac{5}{12}\nabla^2 + \ldots]z_i;$$
$$y_i - y_{i-1} = h[1 + \tfrac{1}{2}\nabla + \tfrac{5}{12}\nabla^2 + \ldots]z_{i-1},$$

وعند طرح المعادلة الثانية من الاولى يحصل :

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} &= h[1 + \tfrac{1}{2}\nabla + \tfrac{5}{12}\nabla^2 + \ldots](z_i - z_{i-1}) \\ &= h[1 + \tfrac{1}{2}\nabla + \tfrac{5}{12}\nabla^2 + \ldots]\nabla z_i. \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

لكن المعادلتين (2.4.11) و (3.9.4) تعطيان

$$\nabla z_i = [1 - \tfrac{1}{2}hD + \tfrac{1}{6}h^2D^2 + \ldots]hDz_i = [1 - \tfrac{1}{2}hD + \tfrac{1}{6}h^2D^2 + \ldots]hf_i,$$

وبالتعويض عن قوى $hD$ في الاقواس المستطيلة بمفكوكات الفروق من المعادلات (2.4.16) , (2.4.17) نحصل على :

$$\nabla z_i = [1 - \tfrac{1}{2}\nabla - \tfrac{1}{12}\nabla^2 - \ldots]hf_i.$$

ولدى تعويض قيمة $\nabla z_i$ هذه في المعادلة (3.9.6) نحصل على معادلة مواترة آدامز– شتورمر

$$\begin{aligned} y_{i+1} = -y_{i-1} + 2y_i + h^2[1 &+ \tfrac{1}{12}\nabla^2 + \tfrac{1}{12}\nabla^3 \\ &+ \tfrac{19}{240}\nabla^4 + \tfrac{3}{40}\nabla^5 + \ldots]f_i. \end{aligned} \quad (3.9.7)$$

## (ب) المعادلات غير الكاملة

متى مالم يعتمد الطرف الايمن من المعادلة (3.9.1) على $y'$ يمكن انجاز تكاملها بواسطة المعادلة ( 3.9.7 ) بمفردها ، على ان المعادلة ( 3.9.7 ) يجب ان تستعمل مع اولى المعادلتين ( 3.9.5 ) عندما يكون $y''$ بدلالة $y'$ سنطبق المعادلة ( 3.9.7 ) لاستيفاء حل مسألة الرقاص عديم الاحتكاك والتي تنظم بالمعادلة (و) من القسم ( 3.2 ) :

$$\ddot{\theta} = -4.6499 \sin \theta, \quad \text{(أ)}$$

بالشروط الابتدائية

$$\theta_0 = 2.0944; \qquad \dot{\theta}_0 = 0, \quad \text{(ب)}$$

والتي بوشر بها في القسم ( 3.2 ) الجدول ( 3.2 ) في هذه الحالة

$$\ddot{\theta} = f(\theta) = -4.6499 \sin \theta$$

لاتعتمد على اي من $\tau$ أو $\dot{\theta}$ مما لايتطلب اكثر من المعادلة ( 3.9.7 ) للحل . ان الجدول ( 3.14 ) يعطي نتائج الاستيفاء الذي انطلق بثلاث قيم للمتغير $\theta$ , $h = 0.1$ مع أخذ الفروق الثانية للدالة $f$ .

ان الاستكمال الخطي من الجدول ( 3.14 ) يعطي $\theta = 0$ عند $\tau = 0.9978$ وبخطأ مقداره 0.2 في المائة في دورة الاهتزاز كما حسبت بطريقة تكامل القطع الناقص ( elliptic integral ) ( انظر القسم ( 3.2 )

جدول ( ١٤-٣ )

| $\tau$ | $\theta_i$ | $f_i$ | $\nabla f_i$ | $\nabla^2 f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2.0944 | −4.0268 | | |
| 0.1 | 2.0742 | −4.0728 | −0.0460 | |
| 0.2 | 2.0132 | −4.2021 | −0.1293 | −0.0833 |
| 0.3 | 1.9101 | −4.3849 | −0.1828 | −0.0535 |
| 0.4 | 1.7631 | −4.5643 | −0.1794 | +0.0034 |
| 0.5 | 1.5705 | −4.6499 | −0.0856 | 0.0938 |
| 0.6 | 1.3313 | −4.5174 | +0.1325 | 0.2181 |
| 0.7 | 1.0467 | −4.0259 | 0.4915 | 0.3590 |
| 0.8 | 0.7215 | −3.0713 | 0.9546 | 0.4631 |
| 0.9 | 0.3652 | −1.6605 | 1.4108 | 0.4562 |
| 1.0 | −0.0081 | | | |

ان الاستعمال الاني لاولى المعادلتين ( 3.9.5 ) مع المعادلة ( 3.9.7 ) موضح في الجدول ( 3.15 ) الذي يعطي حل مسألة الرقاص ذي الاحتكاك في القسم ( 3.2 ) والتي تنظم بالمعادلة ( ك ) :

$$\ddot{\theta} + 0.4\dot{\theta} + 4.6499 \sin \theta = 0, \qquad (ج)$$

بالشروط الابتدائية ( ب ) اعلاه . وباستعمال $h = 1$ وثلاث قيم أولية من حَل متسلسلة تيلر في الجدول ( 3.3 ) في هذه الحالة

$$\ddot{\theta} = f(\theta,\dot{\theta}) = -0.4\dot{\theta} - 4.6499 \sin \theta$$

وبذلك تصبح معادلات المواترة :

$$\dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i + 0.1[1 + 0.5\nabla + 0.4167\nabla^2]f_i; \qquad \text{(d)}$$
$$\theta_{i+1} = -\theta_{i-1} + 2\theta_i + 0.01[1 + 0.0833\nabla^2]f_i.$$

ان الاستكمال الخطي بين $\tau = 1.0$ $\tau = 1.1$ يعطي $\tau = 1.0763$ لزمن مرور الرقاص في الموضع الشاقولي بزيادة 7.63٪ على زمن الرقاص غير المتخامد .

جدول ( ١٥ – ٣)

| $\tau$ | $\theta_i$ | $\dot{\theta}_i$ | $f_i$ | $\nabla f_i$ | $\nabla^2 f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2.0944 | 0 | −4.0268 | | |
| 0.1 | 2.0745 | −0.3963 | −3.9139 | 0.1129 | |
| 0.2 | 2.0153 | −0.7865 | −3.8833 | +0.0306 | −0.0823 |
| 0.3 | 1.9172 | −1.1767 | −3.9030 | −0.0197 | −0.0503 |
| 0.4 | 1.7800 | −1.5701 | −3.9205 | −0.0175 | +0.0022 |
| 0.5 | 1.6036 | −1.9629 | −3.8624 | +0.0581 | 0.0756 |
| 0.6 | 1.3886 | −2.3431 | −3.6355 | 0.2269 | 0.1688 |
| 0.7 | 1.1374 | −2.6883 | −3.1445 | 0.4910 | 0.2641 |
| 0.8 | 0.8550 | −2.9672 | −2.3219 | 0.8226 | 0.3316 |
| 0.9 | 0.5497 | −3.1444 | −1.1713 | 1.1506 | 0.3280 |
| 1.0 | 0.2330 | −3.1903 | +1.0452 | 2.2165 | 1.0659 |
| 1.1 | −0.0724 | −2.9305 | | | |

## 3.10 طريقة فوكس *Fox* لمعادلات المرتبة الثانية الخطية.

***Fox's Methods for Second-order Linear Equations***

من الممكن الحصول على صيغة بسيطة لتكامل معادلة المرتبة الثانية الخطية

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = F(x) \qquad (3.10.1)$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0; \qquad y'(0) = y'_0 \qquad (3.10.2)$$

بالطريقة التي اقترحها فوكس . تضرب المعادلة بالكمية $h^2$ لتصبح

$$h^2y'' + hf(x)(hy') + h^2g(x)y = h^2F(x)$$

ثم يعوض عن $hy', h^2y''$ بما يقابلهما من مفكوك الفروق المركزية في المعادلة ( 2.7.16 ) وبجعل $x = ih$ واطلاق $y_i$ $f_i$, $g_i$, $F_i$ على قيم $y$, $f$, $g$, $F$ عند $x_i$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{h}{2} f_i(y_{i+1} - y_{i-1}) + h^2 g_i y_i$$
$$= h^2 F_i + \left(\frac{\delta^4}{12} - \frac{\delta^6}{90} + \dots\right) y_i + hf_i\mu\left(\frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^5}{30} + \dots\right) y_i.$$

وبحل هذه المعادلة لقيمة $y_{i+1}$ نحصل على صيغة فوكس لمعادلات الدرجة الثانية الخطية

$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 + \frac{h}{2} f_i}\left[-\left(1 - \frac{h}{2} f_i\right) y_{i-1}^{(n)} + (2 - h^2 g_i) y_i^{(n)} + h^2 F_i + \epsilon_{i+1}^{(n-1)}\right]$$

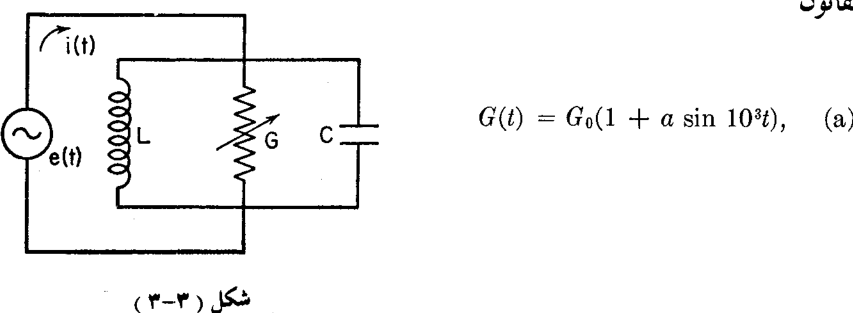
(3.10.3)

حيث ان التصحيح $\epsilon_{i+1}^{(n-1)}$ هو من مرتبة $h^4$ ويساوي

$$\epsilon_{i+1}^{(n-1)} = \left(\frac{\delta^4}{12} - \frac{\delta^6}{90} + \dots\right) y_i^{(n-1)} + hf_i\mu\left(\frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^5}{30} + \dots\right) y_i^{(n-1)}, \quad (3.10.4)$$

يطلق الحل $y$ بواسطة متسلسلة تيلر لغرض الحصول على $y_1$ ثم يتم الاستيفاء بواسطة المعادلة (3.10.3) مع اهمال التصحيح .وتستعمل فروق التقريب الاولي $y^{(1)}$ المحسوبة بهذه الطريقة لايجاد قيمة $\epsilon^{(1)}$ ثم تستعمل المعادلة ( 3.10.3 ) ثانية مع $\epsilon^{(1)}$ للحصول على تقريب ثان ، $y^{(2)}$ ، للمتغير $y$ . وتكرر العملية الى ان تتطابق قيم التصحيح في تقريبين متعاقبين

لغرض توضيح هذه العملية ، تؤخذ الدورة الكهربائية في الشكل ( 3.3 ) حيث المحاثة $L$ . والتوصيل المتغير $G(t)$ والسعة $C$ مربوطة بالتوازي . فاذا ماتغيرت $G(t)$ حسب القانون




$$G(t) = G_0(1 + a \sin 10^3 t), \quad (a)$$

شكل ( ٣-٣ )

فان قانون كيرشهوف الثاني* يعطي المعادلة ادناه للفولتية ( الجهد ) $e$

$$C\frac{de}{dt} + G(t)e + \frac{1}{L}\int e\,dt = i$$

او . بعد المفاضلة بالنسبة الى $t$ والقسمة على $C$ نحصل على

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{G(t)}{C}\frac{de}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{1}{C}\frac{dG(t)}{dt}\right)e = \frac{1}{C}\frac{di}{dt}.$$

وباخذ $C = 1$ ميكروفاراد ( $10^{-6}$ فاراد ) ، $L = 0.02778$ هنري ، $G_0 = 0.007$
مو mho , $a = 0.5$ ,

$$i = (10^{-9}/6)\sin 6\cdot 10^3 t$$

وباهمال الجزء المتغير مع الزمن .

$$\frac{1}{C}\frac{dG}{dt} = 3.5\cdot 10^6 \cos 10^3 t,$$

مقارنة بالحد الثابت $1/LC = 36 \times 10^6$ ,* تصبح معادلة الفولتية

$$\frac{d^2e}{dt^2} + 7000(1 + 0.5\sin 10^3 t)\frac{de}{dt} + 36\cdot 10^6 e = \cos 6\cdot 10^3 t.$$

وبتغيير وحدة الزمن من $t$ بالثواني الى $\tau$ بالكيلوثانية** $(\tau = 10^3 t)$
تتغير المعادلة الى :

( ب ) $$\ddot{e} + 7(1 + 0.5\sin\tau)\dot{e} + 36e = \cos 6\tau$$

حيث ترمز النقطة الى المفاضلة بالنسبة الى $\tau$ . وتقتضي حالة السكون الابتدائية ان

( ج ) $$e(0) = e_0 = 0; \qquad \dot{e}(0) = \dot{e}_0 = 0.$$

---

* انظر *Differential Equations*, Sec. 1.7

** وردت خطأ في الاصل الانكليزي وغيرت هنا الى . لتحقيق الانسجام مع المعادلة النهائية (ب) ( المترجم).

(ن) لغرض حل المعادلة كاملة دون اهمال الحد $dG/dt$ ندع $dv/dt$ ثم تكتب معادلة الدائرة الكهربائية بدلالة

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{G(t)}{C}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = i.$$

ولدى حل هذه المعادلة للمتغير $v$ . تقتنى $e(t)$ بالتفاضل .

( .. ) وردت خطأ . ميللي ثانية . في الاصل الانكليزي ( المترجم)

لاطلاق الحل ترتب المعادلة ( ب ) :

$$\ddot{e} = -7(1 + 0.5 \sin \tau)\dot{e} - 36e + \cos 6\tau; \qquad \ddot{e}_0 = 1$$

وبالتفاضل

$$\dddot{e} = -7(1 + 0.5 \sin \tau)\ddot{e} - (3.5 \cos \tau + 36)\dot{e} - 6 \sin 6\tau; \qquad \dddot{e}_0 = -7;$$

$$e^{iv} = -7(1 + 0.5 \sin \tau)\dddot{e} - (7 \cos \tau + 36)\ddot{e} + (3.5 \sin \tau)\dot{e} - 36 \cos 6\tau;$$
$$e_0^{iv} = -30.$$

وبهذا يقتنى مفكوك متسلسلة $e(\tau)$ في جوار الاصل :

$$e(\tau) = \tfrac{1}{2}\tau^2 - \tfrac{7}{6}\tau^3 - \tfrac{5}{4}\tau^4 = 0.5\tau^2 - 1.1667\tau^3 - 1.25\tau^4,$$

ومنه

$$e(0.05) = 0.00110; \qquad e(0.10) = 0.00371.$$

ان تطبيق المعادلة ( 3.10.3 ) على مسألة الشروط الابتدائية (ب).(ج)
حيث

$$h = 0.1; \quad f(\tau) = 7(1 + 0.5 \sin \tau); \quad g(\tau) = 36; \quad F(\tau) = \cos 6\tau,$$

: يعطى معادلة المواترة للتقريب الاول $e^{(1)}$ للمتغير

$$e_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{1 + 0.05 f_i}[-(1 - 0.05 f_i)e_{i-1}^{(1)} + 1.64 e_i^{(1)} + 0.01 F_i], \qquad \text{(d)}$$

حيث اهمل $\epsilon$ وانطلاقا من $e_0^{(1)} = 0$ و$e_1^{(1)} = 0.00371$ تقتنى النتائج المدونة في الجدول 3.16

جدول ( ١٦-٣ )

| $\tau$ | $f_i$ | $1 + 0.05 f_i$ | $1 - 0.05 f_i$ | $0.01 F_i$ | $e_i^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7.00000 | | | | 0 |
| 0.1 | 7.34944 | 1.36747 | 0.63253 | 0.00825 | 0.00371 |
| 0.2 | 7.69534 | 1.38477 | 0.61523 | +0.00362 | 0.01048 |
| 0.3 | 8.03432 | 1.40172 | 0.59828 | −0.00227 | 0.01337 |
| 0.4 | 8.36297 | 1.41815 | 0.58185 | −0.00737 | 0.00955 |
| 0.5 | 8.67801 | 1.43390 | 0.56610 | −0.00990 | +0.00036 |
| 0.6 | 8.97624 | 1.44881 | 0.55119 | −0.00897 | −0.01026 |
| 0.7 | 9.25477 | 1.46274 | 0.53726 | −0.00490 | −0.01794 |
| 0.8 | 9.51076 | 1.47554 | 0.52446 | +0.00087 | −0.01969 |
| 0.9 | 9.74166 | 1.48708 | 0.51292 | 0.00635 | −0.01491 |
| 1.0 | 9.94514 | 1.49726 | 0.50274 | 0.00960 | −0.00538 |
| 1.1 | 10.11924 | 1.50596 | 0.49404 | | +0.00552 |

ولتقييم تقريب ثان بتصحيح فوكس . تؤخذ فروق $e^{(1)}$ ويحسب التصحيح بالاقتصار على حديه الاولين :

$$\epsilon_{i+1}^{(1)} = \left(\frac{\delta^4}{12} + hf_i\frac{\mu\delta^3}{6}\right)e_i^{(1)} = (0.08333\delta^4 + 0.01667f_i\mu\delta^3)e_i^{(1)}. \qquad \text{(e)}$$

وتظهر نتائج هذه الحسابات في الجدول 3.17

جدول ( ١٧-٣ )

| $\tau$ | $e_i^{(1)}$ | $10^5\delta e_{i+\frac{1}{2}}^{(1)}$ | $10^5\delta^2 e_i^{(1)}$ | $10^5\delta^3 e_i^{(1)}$ and $10^5\mu\delta^3 e_i^{(1)}$ | $10^5\delta^4 e_i^{(1)}$ | $\epsilon_{i+1}^{1}$ | $e_i^{(2)}$ | $e_i^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | 0 | 0 |
| | | 371 | | | | | | |
| 0.1 | 0.00371 | | +306 | (−250) | (250) | −0.00010 | 0.00371 | 0.00371 |
| | | 677 | | −694 | | | | |
| 0.2 | 0.01048 | | −388 | (−488) | 411 | −0.00028 | 0.01040 | 0.01040 |
| | | +289 | | −283 | | | | |
| 0.3 | 0.01337 | | −671 | ( −75) | 417 | +0.00025 | 0.01308 | 0.01305 |
| | | −382 | | +134 | | | | |
| 0.4 | 0.00955 | | −537 | ( 264) | 260 | 0.00058 | 0.00942 | 0.00938 |
| | | −919 | | 394 | | | | |
| 0.5 | +0.00036 | | −143 | ( 415) | +43 | 0.00064 | +0.00073 | +0.00096 |
| | | −1062 | | 437 | | | | |
| 0.6 | −0.01026 | | +294 | ( 368) | −138 | 0.00044 | −0.00934 | −0.00909 |
| | | −768 | | 299 | | | | |
| 0.7 | −0.01794 | | 593 | ( 180) | −239 | +0.00008 | −0.01673 | −0.01656 |
| | | −175 | | +60 | | | | |
| 0.8 | −0.01969 | | 653 | ( −59) | −238 | −0.00029 | −0.01862 | −0.01851 |
| | | +478 | | −178 | | | | |
| 0.9 | −0.01491 | | 475 | (−258) | −160 | −0.00055 | −0.01435 | −0.01468 |
| | | 953 | | −338 | | | | |
| 1.0 | −0.00538 | | 137 | (−400) | (0) | −0.00066 | −0.00550 | −0.00588 |
| | | 1090 | | | | | | |
| 1.1 | +0.00552 | | | (−250) | (200) | −0.00026 | +0.00476 | +0.00445 |

اقتنيت قيم $\mu\delta^3$ $\delta^4$ ( داخل الاقواس) عند $\tau = 0.1, 1.0, 1.1$ بالاستيفاء بالنظر ، غير ان قيم $\mu\delta^3$ ( في الاقواس) عند $\tau$ من 0.2 الى 0.9 تمثل متوسط القيمتين $\delta^3$ المتجاورتين .

ان قيم $\epsilon_{i+1}^{(1)}$ تقتنى بمعادلة المواترة :

$$e_{i+1}^{(2)} = \frac{1}{1 + 0.05f_i}\left[-(1 - 0.05f_i)e_{i-1}^{(2)} + 1.64e_i^{(2)} + 0.01F_i + \epsilon_{i+1}^{(1)}\right], \qquad \text{(و)}$$

حيث تؤخذ قيمة $\epsilon_{i+1}^{(1)}$ من الجدول 3.17 وبأخذ فروق $e_i^{(2)}$ تحسب التصحيحات الجديدة $e_{i+1}^{(2)}$ ومن ثم $e_i^{(2)}$ المدونة في العمود الاخير من الجدول 3.17 . وعندما يظهر ان فروقات $e_i^{(3)}$ وتصحيحاتها مطابقة لتصحيحات $e_i^{(2)}$ وعند هذه النقطة توقف العملية .

من الممكن تجنب اطلاق الحل بطريقة متسلسلة تيلر المستهلكة للوقت . مع التضحية ببعض الدقة . بالتعبير عن الشرط الابتدائي الثاني في المعادلة (3.10.2) بدلالة الفروق المركزية المعدلة ( averaged ) وبتطبيق المعادلة (3.10.3) . دون تصحيح . عند الاصل

$$y_1 - y_{-1} = 2hy'_0;$$

$$\left(1 + \frac{h}{2}f_0\right) y_1 + \left(1 - \frac{h}{2}f_0\right) y_{-1} = (2 - h^2 g_0) y_0 + h^2 F_0.$$

وباختصار قيمة الارتكاز المصطنعة $y_{-1}$ بين المعادلتين :

$$y_1 = \left(1 - \frac{h}{2}f_0\right) hy'_0 + \left(1 - \frac{h^2}{2}g_0\right) y_0 + \frac{h^2}{2}F_0. \qquad (3.10.5)$$

وفي حالة المعادلتين (ب)و(ج) تكون :

$$e_1 = \frac{h^2}{2}F_0 = \frac{(0.1)^2}{2}\cos 0 = 0.005,$$

ومن ثم بتطبيق الطريقة الاصلية . المعادلة (د) .

$$e_2 = 0.01048; \quad e_3 = 0.01280; \quad e_4 = 0.00888.$$

ان دقة هذه الطريقة تعتمد على الاهمية النسبية للخطوة $h$ على قيمة $e_1$
ان طرق فوكس في هذا البند والبند - 3.6 ملائمة للحاسبات القادرة على اخذ الفروق تلقائيا.

## 3.11 طرق نوميرف. *Noumerov's Methods*

عندما تكون المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية خالية من حد المشتقة الاولى $y'$، أي أن صيغتها : –

$$y'' + f(x)y = F(x), \qquad (3.11.1)$$

فان تكاملها قد ينجز بطريقة فعالة تعود الى نوميروف . بضرب المعادلة (3.11.1) بالمقدار $h^2$ وتعويض المشتقة الثانية بمفكوكها من الفروق المركزية المعادلة (2.7.15) . تصبح

$$\left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots\right) y_i + h^2 f_i y_i = h^2 F_i. \qquad (a)$$

وبالتأثير على طرفي المعادلة بالمؤثر $\left(1+\frac{\delta^2}{12}\right)$ يختصر حد $\delta^4$ وتأخذ المعادلة الصيغة التالية :

$$\left(\delta^2+\frac{\delta^6}{240}-\frac{13\delta^8}{15{,}120}+\dots\right)y_i+h^2f_iy_i+\frac{h^2\delta^2}{12}(f_iy_i)=h^2F_i+\frac{h^2\delta^2}{12}F_i$$

أو

$$\text{or}\quad y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}+h^2f_iy_i+\frac{h^2}{12}(f_{i+1}y_{i+1}-2f_iy_i+f_{i-1}y_{i-1})$$
$$=h^2F_i+\frac{h^2}{12}(F_{i+1}-2F_i+F_{i-1})-\left(\frac{\delta^6}{240}-\frac{13\delta^8}{15{,}120}+\dots\right)y_i$$

ولدى حل هذه المعادلة للمتغير $y_{+1}$ نحصل على قاعدة مواترة نوميروف

$$y_{i+1}^{(n)}=\frac{1}{1+\frac{h^2}{12}f_{i+1}}\Bigg[-\left(1+\frac{h^2}{12}f_{i-1}\right)y_{i-1}^{(n)}+\left(2-\frac{5h^2}{6}f_i\right)y_i^{(n)}$$
$$+\frac{h^2}{12}(F_{i-1}+10F_i+F_{i+1})+\epsilon_{i+1}^{(n-1)}\Bigg],\qquad(3.11.2)$$

حيث :

$$\epsilon_{i+1}^{(n-1)}=-\left(\frac{\delta^6}{240}-\frac{13\delta^8}{15{,}120}+\dots\right)y_i^{(n-1)}.\qquad(3.11.3)$$

يلاحظ ان قيمتي $y_0$ , $y_1$ فقط مطلوبتان لانطلاق الحل . كما ان التصحيح ، الذي هو من مرتبة $h^6$ غالبا مايكون تافها حتى لقيم $h$ الكبيرة .

لتوضيح استعمال المعادلة ( 3.11.2 ) خذ الدائرة الكهربائية في الشكل ( 3.4 ) بمحاثة وسعة مربوطتين على التوالي وحيث تتغير السعة حسب القانون

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_0}(1+a\cos 10^3t).$$

ان شحنة المكثف $q(t)$ تحقق المعادلة* :

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=\frac{1}{L}e(t).$$

---

(*) انظر *Differential Equations*, Sec. 2.8.

فاذا كان $1/(LC_0) = 36 \cdot 10^6$ بوحدات عملية . تصبح المعادلة

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 36 \cdot 10^6(1 + 0.4 \cos 10^3 t)q = \cos 6 \cdot 10^3 t$$

او . عندما ندع $\tau = 1000t$

$$\ddot{q} + 36(1 + 0.4 \cos \tau)q = \cos 6\tau,$$

حيث ترمز النقاط الى التفاضل بالنسبة الى $\tau$ . ان شروط السكون الابتدائية تتطلب :

$$q(0) = q_0 = 0; \qquad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = i(0) = 0. \qquad (ج)$$

لا طلاق الحل تفاضل

$$\ddot{q} = -36(1 + 0.4 \cos \tau)q + \cos 6\tau; \qquad \ddot{q}_0 = 1$$
$$\dddot{q} = -36(1 + 0.4 \cos \tau)\dot{q} + 14.4 (\sin \tau)q - 6 \sin 6\tau; \qquad \dddot{q}_0 = 0$$
$$q^{iv} = -36(1 + 0.4 \cos \tau)\ddot{q} + 28.8 (\sin \tau)\dot{q} + 14.4 (\cos \tau)q - 36 \cos 6\tau;$$
$$q_0^{iv} = -86.4,$$

ونحصل على مفكوك المتسلسلة النافذ في جوار صفر

$$q(\tau) = \frac{\tau^2}{2} - \frac{86.4\tau^4}{24} = 0.5\tau^2 - 3.6\tau^4,$$

لذا

$$q(0.1) = q_1 = 0.00464$$

ان تطبيق المعادلة (3.11.2) دون التصحيح . على مسألة الشروط الابتدائية (ب) و(ج) بالقيم

$$h = 0.1; \qquad f(\tau) = 36(1 + 0.4 \cos \tau); \qquad F(\tau) = \cos 6\tau,$$

تعطي معادلة المواترة :

$$q_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{1 + \frac{0.01}{12} f_{i+1}} \left[ -\left(1 + \frac{0.01}{12} f_{i-1}\right) q_{i-1}^{(1)} + \left(2 - \frac{5}{6} 0.01 f_i\right) q_i^{(1)} + \frac{0.01}{12} (F_{i-1} + 10F_i + F_{i+1}) \right] \qquad (د)$$

وانطلاقا من $q_1 = 0.00464, q_0 = 0$ تعطي المعادلة (د) النتائج المدونة في الجدول

3.18 الذي يحوي حل المعادلة ذات المعاملات الثابتة المناظرة للمعادلة (ب) :

$$\ddot{q} + 36q = \cos 6\tau,$$

جدول (١٨-٣)

| $\tau$ | $f_i$ | $1 + \frac{0.01}{12} f_i$ | $2 - \frac{5}{6} 0.01 f_i$ | $\frac{0.01}{12}(F_{i-1} + 10F_i + F_{i+1})$ | $q$ | $q_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 50.4 | 1.04200 | 1.58002 | | 0 | 0 |
| 0.1 | 50.328 | 1.04194 | 1.58062 | | 0.00464 | 0.00471 |
| 0.2 | 50.11308 | 1.04176 | 1.58241 | 0.00801 | 0.01475 | 0.01553 |
| 0.3 | 49.75704 | 1.04146 | 1.58537 | +0.00352 | 0.02115 | 0.02435 |
| 0.4 | 49.26312 | 1.04105 | 1.58949 | −0.00221 | +0.01532 | 0.02252 |
| 0.5 | 48.63708 | 1.04053 | 1.59471 | −0.00716 | −0.00465 | +0.00588 |
| 0.6 | 47.88504 | 1.03990 | 1.60097 | −0.00961 | −0.03171 | −0.00221 |
| 0.7 | 47.01384 | 1.03918 | 1.60823 | −0.00871 | −0.05258 | −0.05084 |
| 0.8 | 46.03248 | 1.03836 | 1.61641 | −0.00476 | −0.05426 | +0.06641 |
| 0.9 | 44.95104 | 1.03746 | 1.62542 | +0.00085 | −0.03105 | −0.05796 |
| 1.0 | 43.78032 | 1.03648 | 1.63518 | 0.00616 | +0.01161 | −0.00233 |
| 1.1 | 42.53184 | 1.03544 | | 0.00932 | 0.05845 | +0.02856 |

والتي تفي بالشروط (ج) . أي

$$q_c = \frac{\tau}{12} \sin 6\tau. \qquad (هـ)$$

ان التصحيحات المقيمة بواسطة المعادلة (3.11.3) تغير الرقم الاخير من $q$ بوحدة أو وحدتين وهي لهذا قابلة للاهمال .

ويمكن تعميم طريقة نوميروف لحل معادلات مرتبة مشتقاتها زوجية ومن أي مرتبة والتي معاملها المتغير الوحيد هو معامل $y$ . ولتؤخذ معادلة المرتبة الرابعة .

$$y^{iv} + cy'' + f(x)y = F(x), \qquad (3.11.4)$$

كمثال حيث ان ضرب حدودها بالمقدار $h^4$ والتعويض عن $h^4y^{iv}$ ، $h^2y''$ بمفكوكات فروقها المركزية يقود الى المعادلة المناظرة :

$$\left[\left(\delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7}{240}\delta^8 - \ldots\right) + ch^2\left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \ldots\right) + h^4 f_i\right] y_i = h^4 F_i. \qquad (و)$$

وباستعمال المؤثر $1 + \alpha\delta^2$ على المعادلة . حيث $\alpha$ ثابت غير معين . نحصل على :

$$\left[\left(\delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \ldots\right) + \alpha\left(\delta^6 - \frac{\delta^8}{6} + \ldots\right) + ch^2\left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \ldots\right)\right.$$
$$\left. + \alpha ch^2\left(\delta^4 - \frac{\delta^6}{12} + \ldots\right) + h^4 f_i\right] y_i + \alpha h^4 \delta^2 (f_i y_i) = h^4(1 + \alpha\delta^2)F_i. \quad (\text{ز})$$

ويتم اختيار قيمة $\alpha$ بحيث يصبح معامل $\delta^6 y_i$ في المعادلة (ز) صفرا :

$$\alpha = \frac{2}{15}\left[\frac{15 - ch^2}{12 - ch^2}\right]. \qquad (3.11.5)$$

وبقيمة $\alpha$ هذه ومع أهمال الفروق التي مرتبتها اعلى من ستة تصبح المعادلة (ز) كما يلي :

$$[1 + ch^2(\alpha - \tfrac{1}{12})]\delta^4 y_i + ch^2\delta^2 y_i + h^4(1 + \alpha\delta^2)f_i y_i = h^4(1 + \alpha\delta^2)F_i. \qquad (3.11.6)$$

ويمكن حل هذه المعادلة للمتغير $y_{i+2}$ بدلالة $y_{i+2}$ ، $y_{i+1}, y_i, y_{i-1}$ مما يسمح بالتكامل خطوة فخطوة باربع قيم انطلاق وبخطأ من مرتبة $h^8$ .

وللحصول على قيم الانطلاق الاربعة تستعمل متسلسلة تيلر أو تستعمل اربع معادلات فروق مشتقة من الشروط الابتدائية الثلاثة $y', y'', y'''$ ومن المعادلة التفاضلية في نقطة الاصل ، وتشتمل هذه المعادلات خمس نقاط $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2$ واحدة منها $y_0$ معلومة. ويعطي الجدول 3.19 حل المعادلة.

$$y^{\text{iv}} - 10^4 y = 0; \quad y_0 = 1; \quad y_0' = 0; \quad y_0'' = -100; \quad y_0''' = 0, \quad (\text{ح})$$

حيث اخذت نقاط الانطلاق الاربعة من الحل الصحيح $y = \cos 10x$ وفي هذه الحالة

$$c = 0; \quad f(x) = -10^4; \quad \alpha = \tfrac{1}{6}; \quad F(x) = 0,$$

تصبح معادلة المواترة :

$$y_{i+2}^{(1)} = (4 + \tfrac{1}{6}10^4h^4)y_{i+1} - (6 - \tfrac{2}{3}10^4h^4)y_i + (4 + \tfrac{1}{6}10^4h^4)y_{i-1} - y_{i-2} \quad (\text{ط})$$

كما يحوي الجدول 3.19 على الحل المقتنى من معادلة المواترة :

(ي)

$$y_{i+2}^{(2)} = 4y_{i+1} - (6 - 10^4 h^4)y_i + 4y_{i-1} - y_{i-2}$$

التي اشتقت باستعمال الحدود الاولى لمفكوك الفروق المركزية المعادلة (و) وكذلك على القيمة الصحيحة للمتغير $y$.

جدول (١٩-٣)

| $x$ | $y_i = \cos 10x$ | $y_i^{(1)}$ | $e\%$ | $y_i^{(2)}$ | $e\%$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.4 | −0.6536 | −0.6546 | 0.15 | −0.7183 | 9.8 |
| 0.5 | 0.2837 | 0.2784 | 1.90 | −0.1279 | |

باستعمال المؤثر $(1 + \alpha\delta^2 + \beta\delta^4)$ على المعادلة (أ) واختيار $\alpha, \beta$ بحيث تصبح معاملات $\delta^4 y_i, \delta^6 y_i$ صفرا . يمكن التوصل الى معادلة مواترة بخطأ من مرتبة $h^8$ . الجدول 3.20 يوضح هذه العملية مطبقة على المسألة

$$y'' + 100y = 0; \qquad y_0 = 1; \qquad y'_0 = 0.$$

في هذه الحالة تكون

(ك)

$$\alpha = \frac{1 + \frac{2}{15}ch^2}{12 + ch^2}; \qquad \beta = -\frac{\frac{1}{20}}{12 + ch^2}.$$

وتكون قواعد المواترة ذات الخطأ من مرتبة $h^4, h^6, h^8$ على التوالي . باستعمال $h = 0.1$

(ل)

$$y_{i+1}^{(1)} = -y_{i-1}^{(1)} + y_i^{(1)};$$
$$y_{i+1}^{(2)} = -y_{i-1}^{(2)} + \tfrac{14}{13}y_i^{(2)};$$
$$y_{i+1}^{(3)} = -y_{i-1}^{(3)} + \tfrac{229}{212}y_i^{(3)}.$$

## 3.12 حل معادلات القيم المميزة بطريقة التكامل الامامية:

***Solution of Characteristic Value Problems by Forward Integration***

معادلات القيم المميزة احادية البعد تحكم بمعادلات تفاضلية . اعتيادية متجانسة ذات شروط حـدودية متجانسة . إن الحلول غير الصفرية لهذه المسائل توجـد لقيـم مميزة . من وسيط parameter والتي يجب تعيينها . إن الحل العددي لمسائل القيم المميزة هو احد الفروع المهمة للتحليل العددي الحديث . كما انه اساسي في مجال الاهتزازات

والاستقرار المرن . ستوضح هنا طريقة التكامل الامامية * بينما سيعطي حل بالفروق المركزية والمعادلات الآنية في القسم 4.7 .

ان buckling أويلر لعتبة بسيطة المسند يحكم بمسألة القيم المميزة **

$$y'' + \frac{PL^2}{EI} y = 0; \qquad y(0) = y(1) = 0, \qquad (3.12.1)$$

حيث $L$ طول العتبة $EI$ جسؤتها الانثنائية $P$. الدفع واشارات الفتحة ( prime signs ) تعني التفاضل بالنسبة الى المتغير اللابعدي $z = x/L$ بضرب المعادلة (3.12.1)

بالمقدار $h^2 = 1/n^2$ وتعويض فروق مركزية من مرتبة $h^2$ عن $h^2y''$ نحصل على قاعدة المواترة :

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + (2 - k^2h^2)y_i, \qquad (3.12.2)$$

حيث

$$k^2 = \frac{PL^2}{EI}. \qquad (3.12.3)$$

ينطلق التكامل بقيمة تجريبية $k_0^2$ بدلا من $k^2$ و $y_1 = 1$ لان المسألة المتجانسة للمعادلة

جدول ( ٢١-٣ )

| $i$ | $z_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 0.0000 |
| 1 | 0.25 | 1.0000 |
| 2 | 0.50 | 1.2500 |
| 3 | 0.75 | 0.5625 |
| 4 | 1.00 | −0.5469 |

( 3.12.1 ) تعرف (تحدد) $y$ من ثابت ضارب . يعطي الجدول 3.21 نتائج التكامل باستعمال $n = 4; k_0^2 = 12$ حيث تصبح معادلة المواترة :

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + 1.25y_i. \qquad (a)$$

---

* See L. Collatz, *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung,* Chelsea Publishing Company, New York, 1948.

( ) انظر مثلا المعادلات التفاضلية البند 1.7

(+) جسؤتها الانثنائية Fluxural rigidity

وبيين الاستكمال الخطي بان $y$ تساوي صفرا عند $z = 0.8768$ وحيث انه يمكن بيان كون $k^2$ تتناسب طرديا مع $1/L^2$ وان الطول اللابعدي للعتبة هو $z = 1$ . لذا فان قيمة $k^2$ هي

$$k^2 = (0.8768)^2 k_0^2 = 9.2256$$

بخطأ مقداره 6.5 بالمائة نسبة الى $k^2 = \pi^2$

يعطي الجدول 3.22 التكامل باستعمال $n = 10; k_0^2 = 9$ أي للمعادلة

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + 1.91 y_i. \qquad \text{(b)}$$

ويعطي الاستكمال الخطي في هذه الحالة $y = 0$ عند $z = 1.0433$ ولذا فان

$$k^2 = (1.0433)^2 \times 9 = 9.7965,$$

بخطأ مقداره 0.74

كما يحوي الجدول 3.22 قيم $y_{i+1} - y_{i-1}$ التي تتناسب طرديا مع $y_i'$ ويبين الاستكمال الخطي ان $y_i' = 0$ عند $z = 0.5218$ وباعتبار هذا طول عتبة حيدية ( cantilever beam ) نحصل على $k^2$ المناظرة .

$$k^2 = (0.5218)^2 \times 9 = 2.4507$$

جدول ( ٢٢-٣ )

| $i$ | $z_i$ | $y_i$ | $y_{i+1} - y_{i-1}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | 0.0000 | |
| 1 | 0.1 | 1.0000 | 1.9100 |
| 2 | 0.2 | 1.9100 | 1.6481 |
| 3 | 0.3 | 2.6481 | 1.2379 |
| 4 | 0.4 | 3.1479 | 0.7163 |
| 5 | 0.5 | 3.3644 | 0.1302 |
| 6 | 0.6 | 3.2781 | −0.4676 |
| 7 | 0.7 | 2.8968 | −1.0233 |
| 8 | 0.8 | 2.2548 | −1.5769 |
| 9 | 0.9 | 1.4099 | −1.8167 |
| 10 | 1.0 | 0.4381 | −1.9830 |
| 11 | 1.1 | −0.5731 | |

وبخطأ مقداره 0.67 ٪ مقارنة بقيمة $\pi^2/4$

ولاستعمال صيغة تكامل فعالة تطبق معادلة نوميروف ( 3.11.2 ) على المسألـــة :

$$y'' + k^2(1 + \sin \pi z)y = 0; \qquad y(0) = y(1) = 0, \qquad (3.12.4)$$

التي تحكم حدل عتبة بسيطة المسند ذات عزم قصور ذاتي متغير $I(z)=I_0/(1+\sin \pi z)$

تصبح معادلة المواترة في هذه الحالة

$$y_{i+1} = \frac{1}{1 + \frac{k^2h^2}{12}(1 + \sin \pi z_{i+1})} \left\{ \left[ 2 - 10\frac{k^2h^2}{12}(1 + \sin \pi z_i) \right] y_i - \left[ 1 + \frac{k^2h^2}{12}(1 + \sin \pi z_{i-1}) \right] y_{i-1} \right\}. \qquad (3.12.5)$$

يبين الجدول 3.23 التكامل باستعمال $k_0^2 = PL^2/EI_0 = 8,\ n = 4$

جدول ( ٢٣-٣ )

| $i$ | $z_i$ | $1 + \frac{k^2h^2}{12}(1 + \sin \pi z_i)$ | $2 - \frac{10}{12}k^2h^2(1 + \sin \pi z_i)$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 1.0417 | 1.5833 | 0 |
| 1 | 0.25 | 1.0711 | 1.2887 | 1.0000 |
| 2 | 0.50 | 1.0833 | 1.1667 | 1.1896 |
| 3 | 0.75 | 1.0711 | 1.2887 | 0.2957 |
| 4 | 1.00 | 1.0417 | 1.5833 | −0.8713 |

وبالاستكمال الخطي $y = 0$ عند $z = 0.8133$ لذا

$$k^2 = (0.8133)^2 \times 8 = 5.2920,$$

بخطا مقداره $e = 0.71$ بالمائة مقارنة بالحل الصحيح 5.33 المقتنى بالمعاودة .

## 3.13 معادلات الفروق :

***Difference Equations***

استعملت الفروق المحددة في الاقسام السابقة لتحويل المعادلة التفاضلية الى معادلة مواترة . تتضمن قيم التكامل المجهولة في نقاط الارتكاز . وذلك من اجل حل مسألة الشروط الابتدائيـــة . ثم استعملت قواعد المواترة هذه لتحديد قيمة $y_i$ حال معرفة قيم الارتكاز $y_{i-1}$ ، $y_{i-2}$ السابقة لها . ان نفس الاسلوب سيطبق على مسائل القيم الحدودية في فصول قادمة . حيث سيتجلى ان قيم الارتكاز $y_i$ تفي بمجموعة آنية من المعادلات الجبرية الخطية.

ان حل معادلة مواترة الفروق المحدودة . التي تربط عددا من نقاط الارتكاز المتساوية البعد على الاحداثي $x$ . هو عملية من الجوهرية في التفاضل والتكامل العددي بحيث ان نظرية كاملة للمعادلات الفروقية . تناظر نظرية المعادلات التفاضلية * قد نشأت.

ولاغراض هذا الكتاب . يكون من الضروري تطوير نظرية المعادلات الفروقية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة فقط . اي معادلات على الطراز التالي

$$y_{k+n} + A_{n-1}y_{k+n-1} + A_{n-2}y_{k+n-2} + \ldots + A_1y_{k+1} + A_0y_k = 0, \quad (3.13.1)$$

حيث $n^{**}, k$ اعداد صحيحة والمعاملات $A$ ثابتة.

باستعمال مؤثر الخطوة $E \equiv e^{hD}$, *step-operator*

$$Ey_k = y_{k+1} \quad (3.13.2)$$

وقواه : powers

$$E^2y_k = y_{k+2}; \quad E^3y_k = y_{k+3}; \quad \ldots; \quad E^ny_k = y_{k+n}, \quad (3.13.3)$$

والذي هو مناظر للمؤثر $D$. يمكن كتابة معادلة الفروق ( 3.13.1 ) بالصيغة التالية

$$(E^n + A_{n-1}E^{n-1} + A_{n-2}E^{n-2} + \ldots + A_1E + A_0)y_k = 0. \quad (3.13.4)$$

ويقتنى حل المعادلة ( 3.13.4 ) بواسطة الدالة التجريبية

$$y_k = z^k, \quad (3.13.5)$$

حيث عدد مركب ( أو حقيقي ) . ان تعويض المعادلة ( 3.13.5 ) في ( 3.13.1 ) يعطي :

$$(z^n + A_{n-1}z^{n-1} + A_{n-2}z^{n-2} + \ldots + A_1z + A_0)z^k = 0, \quad (3.13.6)$$

ولكي تكون $y_k$ حلا لمعادلة الفروق مهما كانت قيمة العدد الصحيح $k$ . يجب ان تكون $z$ جذرا للمعادلة الجبرية ( المعادلة المميزة )

$$z^n + A_{n-1}z^{n-1} + A_{n-2}z^{n-2} + \ldots + A_1z + A_0 = 0. \quad (3.13.7)$$

* See *Differential Equations*, Chap. 3. هامش ص (*)

انظر الفصل الثالث . المعادلات التفاضلية

(**) استعمل العداد $k$ هنا بدلا عن $i$ لتفادي الالتباس مع العدد الخيالي . بينما تمثل $n$ مرتبة المعادلة .

(أ) عندما تكون الجذور $z_j \; (j = 1,2,\ldots,n)$ للمعادلة (3.13.7) حقيقية ومتباينة يمكن تحليل المعادلة (3.13.6) الى عواملها

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\ldots(z - z_n)z^k = 0$$

ويكون حلها العام كالاتي :

$$y_k = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + \ldots + C_n z_n^k, \qquad (3.13.8)$$

حيث $C_j$ ثوابت اختيارية تحددها شروط المسألة

وكمثال لنأخذ المعادلة الفروقية :

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 0 \qquad \text{(a)}$$

بالشروط

$$y_0 = 0; \qquad y_4 = 10, \qquad \text{(b)}$$

ومعادلتها المميزة

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

لها جذران حقيقيان $z_2 = 3 \,,\, z_1 = 1$
كالاتي :

$$y_k = C_1 \cdot 1^k + C_2 \cdot 3^k \qquad \text{(c)}$$

ويتطلب الشرطان (b) كون

$$C_1 + C_2 = 0; \qquad C_1 \cdot 1^4 + C_2 \cdot 3^4 = 10; \qquad C_1 = -C_2 = -\tfrac{1}{8},$$

ويصبح الحل الخاص للمسألة (a) , (b)

$$y_k = \tfrac{1}{8}(3^k - 1^k). \qquad \text{(d)}$$

من المفضل احيانا ان يكتب الحل العام للمعادلة الفروقية بصيغة أسية باستعمال لوغاريتمات الجذور $z_j$ أي :

$$r_j = \ln z_j; \qquad z_j = e^{r_j} \qquad (3.13.9)$$

ولذا تصبح المعادلة (3.13.8)

$$y_k = C_1 e^{r_1 k} + C_2 e^{r_2 k} + \ldots + C_n e^{r_n k}. \qquad (3.13.10)$$

(ب) عندما يكون للمعادلة المميزة جذر حقيقي ، $z_1$ ، مكرر مرتين ، يكون للمعادلة

( 3.13.4 ) عامل هو :

$$y_{k+2} - 2z_1y_{k+1} + z_1^2y_k. \qquad \text{(e)}$$

ومن السهل التأكد . بالتعويض . من أن :

$$y_k = kz_1^k \qquad \text{(f)}$$

هو الحل المستقل الثاني للعامل المتكرر (e) :

$$(k + 2)z_1^{k+2} - 2z_1(k + 1)z_1^{k+1} + z_1^2kz_1^k = z_1^{k+2}(k + 2 - 2k - 2 + k) = 0.$$

وهكذا فان حدود الحل العام المنبثقة من الجذر الحقيقي المكّرر $z_1$ هي :

$$y_k = (C_1 + C_2k)z_1^k \qquad \text{(g)}$$

وكقاعدة عامة . فان حدود الحل العام المنبثقة من جذر حقيقي متكرر $m$ مرة هي :

$$y_k = (C_1 + C_2k + C_3k^2 + \dots + C_mk^{m-1})z_j^k. \qquad (3.13.11)$$

مثلا . المعادلة :

$$y_{k+3} - 8y_{k+2} + 21y_{k+1} - 18y_k = 0 \qquad \text{(h)}$$

لها معادلة مميزة هي :

$$(z - 2)(z - 3)^2 = 0$$

لذلك فان : جذورها حقيقية $z_1 = 2$ , $z_2 = z_3 = 3$ وحلها العام :

$$y_k = C_12^k + (C_2 + C_3k)3^k. \qquad \text{(i)}$$

ج) عندما يكون للمعادلة المميزة جذران مركبان مترافقان complex conjugate

$$z_1 = \rho e^{i\theta}; \qquad z_2 = \rho e^{-i\theta}, \qquad (3.13.12)$$

تكون الحدود المناظرة من الحل العام :

$$y_k = \bar{C}_1(\rho e^{i\theta})^k + \bar{C}_2(\rho e^{-i\theta})^k = \rho^k(C_1 \cos k\theta + C_2 \sin k\theta), \qquad (3.13.13)$$

حيث $C_1, C_2 . \bar{C}_1, \bar{C}_2$ ثوابت اختيارية

كمثال . المعادلة التالية :

$$y_{k+1} - 2y_k + 2y_{k-1} = 0 \qquad \text{(j)}$$

لها معادلة مميزة

$$z^2 - 2z + 2 = 0,$$

بجذور $z_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{\pm(\pi/4)i}$ ولذا فحلها العام يكون

$$y_k = 2^{k/2}\left(C_1 \cos k\frac{\pi}{4} + C_2 \sin k\frac{\pi}{4}\right). \qquad \text{(k)}$$

(د) عندما يكون للمعادلة المميزة جذور مركبة مترافقة مكررة $m$ مرة ، تصبح الثوابت $C_1,\ C_2$ من المعادلة ( 3.13.13 ) ، على التوالي ،

$$C_1 + C_2 k + C_3 k^2 + \ldots + C_m k^{m-1};$$
$$C_{m+1} + C_{m+2} k + C_{m+3} k^2 + \ldots + C_{2m} k^{m-1}. \qquad (3.13.14)$$

## 3. تراكم الخطأ في التكامل خطوة فخطوة :

***Accumulation of Error in Step-by-step Integration***

تظهر معادلات التكامل في هذا الفصل الخطأ $\epsilon$ المتأصل في استعمالها ، أي الفرق بين الحلين الصحيح والتقريبي لمعادلة تفاضلية الناجم عن خطوة واحدة في عملية الحل العددي ، تسمى هذه الاخطاء عادة اخطاء البتر *truncation errors* ويمكن تخفيفها باستعمال

عدد اكبر من الحدود في مفكوك المشتقات من الفروق المحدودة او بتخفيض الفاصل $h$ . ومن ناحية اخرى فانه لابد من تراكم اخطاء البتر هذه في عمليات الخطوة فخطوة لسببين اولهما كون نقطة البداية في كل خطوة غير دقيقة وثانيهما لان كل خطوة تدخل خطأ اضافيا في العملية .

ان كلا من اخطاء البتر والاخطاء المتراكمة يعتمد على الفاصل $h$ فقط ، حالما تعطي المعادلة التفاضلية ويتم اختيار معادلة التكامل . وسيبين في هذا القسم ، على مثال ابتدائي ، انه مالم تكن $h$ اصغر من قيمة معينة فان حل المعادلة الفروقية قد يتباعد اكثر فاكثر عن حل المعادلة التفاضلية المناظرة أي أن حل المعادلة الفروقية قد يصبح غير مستقر مالم يكن اختيار $h$ لائقا :

تمعن في مسألة الشرط الابتدائي : —

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0;$$
$$y_0 = 1; \qquad \dot{y}_0 = 0, \qquad (3.14.1)$$

والتي حلها المحكم rigorous solution

$$y = \cos \omega t, \qquad (3.14.2)$$

ثم طبق على المعادلة (3.14.1) طريقة نوميروف المعادلة (3.11.2) بضرب المعادلة (3.14.1) بالكمية $h^2$ وتعويض $(\delta^2 - \delta^4/12)y_k$ عن $h^2\ddot{y}$,* ثم التأثير على المعادلة كلها بالمؤثر $(1 + \delta^2/12)$ نحصل على المعادلة الفروقية

$$\delta^2 y_k + \frac{\omega^2 h^2}{12}(12 + \delta^2)y_k = 0$$

أو

$$y_{k+1} + 2cy_k + y_{k-1} = 0, \qquad (3.14.3)$$

حيث :

$$2c = \frac{\frac{5}{6}\omega^2 h^2 - 2}{1 + \frac{1}{12}\omega^2 h^2}. \qquad (3.14.4)$$

ستؤخذ . بصورة منفصلة . ثلاث حالات في حل المعادلة ( 3.14.3 ) بطرق البند 3.13

$$c > 1; \qquad c = 1; \qquad 1 > c > -1.$$

(أ) عندما تكون $c > 1$ دع

$$c = \cosh \alpha$$

ثم عوض $y_k = z^k$ في المعادلة (3.14.3)

$$[z^2 + 2(\cosh \alpha) z + 1] z^{k-1} = 0.$$

جذور المعادلة المميزة هي

$$z_{1,2} = -\cosh \alpha \pm \sqrt{\cosh^2 \alpha - 1}$$

$$= -\cosh \alpha \pm \sinh \alpha = \begin{cases} -e^{-\alpha} \\ -e^{\alpha} \end{cases}$$

ويصبح الحل العام

$$y_k = c_1(-1)^k e^{-\alpha k} + c_2(-1)^k e^{\alpha k}. \qquad (b)$$

وتتطلب الشروط الابتدائية ان يكون :

$$y_0 = c_1 + c_2 = 1$$

(*) ابدل العداد $i$ بالعداد $k$ لتجنب الالتباس مع الرقم الخيالي .

وكذلك $\dot{y}_0 \doteq (y_1 - y_{-1})/2h = 0$ أي أن

$$(-c_1e^{-\alpha} - c_2e^{\alpha}) - (-c_1e^{\alpha} - c_2e^{-\alpha}) = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})(c_1 - c_2) = 0,$$

ومنها $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ وبذلك يصبح الحل الخاص :

$$y_k = \tfrac{1}{2}[(-1)^k e^{-\alpha k} + (-1)^k e^{\alpha k}] = (-1)^k \cosh \alpha k. \qquad \text{(c)}$$

ان هذا الحل ينمو بلا حدود . وبمنوال متذبذب . مع $k$ وبعد بضع خطوات لايمكن ان يمثل باي درجة من الدقة الحل المثلثي $\cos \omega t$ . لذلك عندما تكون $c>1$ أي بالمعادلة (3.14.4)

$$\omega^2 h^2 > 6 \qquad (3.14.5)$$

يصبح حل المعادلة الفروقية غير مستقر.

(ب) عندما تكون $c=1$ يكون للمعادلة المميزة للمعادلة (3.14.3)

$$z^2 + 2z + 1 = 0,$$

جذر حقيقي مكرر $z_1 = z_2 = -1$ ولذلك . بالمعادلة (3.13.11) يكون الحل العام

$$y_k = (c_1 + c_2 k)(-1)^k.$$

وتتطلب الشروط الابتدائية ان :

$$y_0 = 1 \quad \therefore \quad c_1 = 1;$$

$$y_1 = y_{-1} \quad \therefore \quad c_1 + c_2 = c_1 - c_2,$$

ومنها $c_2 = 0$ وهكذا فان الحل الخاص يعطي بالمعادلة :

$$y_k = (-1)^k = (e^{\pi i})^k = \cos k\pi \qquad \text{(d)}$$

والتي لهاسلوك متذبذب ومدى ( سعة ) amplitudeصحيح .

ولغرض تقويم تردد ( frequency ) الحل . دع $t = kh$ في المعادلة (d) حتى يكون

$$y_k = \cos \frac{\pi}{h} t = \cos \frac{\pi}{\omega h} \omega t. \qquad \text{(e)}$$

ان تردد هذا الحل هو $\pi/\omega h$ مرة بقدر التردد $\omega$ للحل الصحيح . وحيث ان المعادلة ( 3.14.4 ) تعطي لقيمة كلا من $c = 1$ ، $\omega^2 h^2 = 6$ لذلك فان تردد المعادلة الفروقية هو ( $\pi/\sqrt{6} = 1.28$ ) مرة اكبر من تردد الحل الصحيح ، وبعد فترة قصيرة تخرج المعادلة الفروقية عن الطور .

( ج ) عندما تكون $1 > c \geq -1$ د ع

$$c = \cos \alpha \qquad (0 < \alpha \leq \pi) \qquad \text{(f)}$$

بحيث تصبح المعادلة المميزة

$$z^2 + 2 (\cos \alpha) z + 1 = 0,$$

بجذور

$$z_{1,2} = -\cos \alpha \pm i \sin \alpha = \begin{cases} e^{(\pi-\alpha)i} \\ e^{-(\pi-\alpha)i}. \end{cases}$$

ولذا يصبح الحل العام للمعادلة :

$$y_k = c_1 e^{k(\pi-\alpha)i} + c_2 e^{-k(\pi-\alpha)i}.$$

وتتطلب الشروط الابتدائية ان يكون :

$$c_1 + c_2 = 1; \qquad c_1 - c_2 = 0,$$

ومنها $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$

$$y_k = \tfrac{1}{2}[e^{k(\pi-\alpha)i} + e^{-k(\pi-\alpha)i}] = \cos k(\pi - \alpha).$$

ان تردد هذا الحل هو $\omega(\pi - \alpha)/\omega h$ . يبين الجدول ( 3.24 ) قيم $c$, $\omega^2 h^2$ $(\pi - \alpha)/\omega h$ المناظرة للقيم المعطاة من $\alpha$.

جدول ( ٣-٢٤ )

| $\alpha$ | $0$ | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | 1 | $\sqrt{2}/2$ | 0 | −0.7071 | −1 |
| $\omega^2 h^2$ | 6 | 4.77 | 2.40 | 0.6161 | 0 |
| $(\pi - \alpha)/\omega h$ | 1.28 | 1.08 | 1.01 | 1.0006 | 1 |

عندما تكون $c = -1$ نعطي المعادلة (3.14.4) $h = 0$ ولذلك فان الحل العددي يقترب في النهاية من الحل الصحيح للمعادلة ( 3.14.1 ) وهكذا يظهر ان طريقة نوميروف لن تلتم على الاطلاق . في هذه المسألة البسيطة . لقيم $\omega^2 h^2 > 6$ اي لفترة زمنية

$$h > \frac{\sqrt{6}}{\omega} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi} T = \frac{T}{2.56},$$

حيث $T$ هي دور ( period ) الحل . وتلتم ( converge ) هذه الطريقة لقيم $h < T/2.56$ وتعطي نتائج حسنة عند

$$\omega^2 h^2 < 2.40 = \tfrac{12}{5} \quad \therefore \quad h < 2\sqrt{\tfrac{3}{5}}\,\frac{1}{\omega} = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,\frac{T}{\pi} = \frac{T}{4.05}.$$

لذا فان طريقة نوميروف تعطي نتائج جيدة لفترة زمن h أقل من ربع الدور . وحيث ان هذه الطريقة غالبا ماتطبق في مسائل الاهتزاز المعقدة على بضعة المناويل modes، الاولى من اهتزاز المنظومة . فانه من المهم ان نتذكر بان الفترة الزمنية يجب ان تكون اصغر من ربع اقصر دورة تؤخذ بنظر الاعتبار . من الممكن الحصول على نتائج مشابهة لمعادلات تفاضلية اكثر تعقيدا ولطرق تكامل اخرى .

## مسائل

**3.1** جد . بمفكوك متسلسلة تيلر . قيمة تكاملات المسائل التالية عند :

(a) $x =$ 0.1 (0.1) 0.3 لثلاثة ارقام ذات معنوية

(b) $x =$ 1.0 ،1.1 لاربعة ارقام ذات معنوية

$$y' - 2y = 3e^x; \qquad y(0) = 0.$$

الجواب :

(a) $y(0.1) = 0.348;\ y(0.2) = 0.811;\ y(0.3) = 1.415.$
(b) $y(1) = 13.91;\ y(1.1) = 17.87.$

**3.2** جد لاربعة ارقام معنوية . قيمة التكامل في المسألة التالية عند $x = 2.1, 2.2$ بواسطة مفكوك متسلسلة تيلر حول $x = 2$

$$y' + \frac{1}{x} y^2 = 0; \qquad y(2) = 1.442.$$

3.3 جد قيم التكاملات في المسائل التالية لاربعة ارقام معنوية عند $x = 0.1\ (0.1)\ 0.3$ بمتسلسلة تيلر .

(a) $y'' = -xy; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.5.$
(b) $y'' + yy' = x^2; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$

الجواب
(a) $y(0.1) = 1.050; y(0.2) = 1.099; y(0.3) = 1.145.$
(b) $y(0.1) = 1.095; y(0.2) = 1.180; y(0.3) = 1.257.$

3.4 جد لثلاثة ارقام معنوية . قيمة التكامل في المسألة التالية عند $x = 0.2,\ 0.4$ بمفكوك متسلسلة تيلر

$y''y^2 + 1 = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 1.$

3.5 جد قيمة التكامل في المسألة التالية لاربعة ارقام ذات دلالة معنوية عند $x = 1.1\ (0.1)\ 1.3$ باستعمال مفكوك متسلسلة تيلر

$y'' + y^2y' = x^3; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 1.$

الجواب
$y(1.1) = 1.100; y(1.2) = 1.201; y(1.3) = 1.306.$

3.6 رياضي طوله $L$ ( الشكل 3.1 ) يطلق من السكون من زاوية $\theta_0 = 160°$ ويتذبذب في محيط لزج معامله $= 1.2$ ثا$^{-1}$ وحدة كتلية .
احسب $\theta$ في الفترة $t = 0\ (0.1)\ 0.2$ بمتسلسلة تيلر .

3.7 جد قيمة التكاملات في المسائل التالية بطريقة اويلر للمنبيء – المصحح في النقاط المبينة .

(a) $y' - y = e^x; \quad y(0) = 0; \quad x = 0.2, 0.4.$
(b) $y' - y^2 = 0; \quad y(0) = 1; \quad x = 0.1, 0.2.$
(c) $y' - xy = 0; \quad y(1) = 1; \quad x = 1.1, 1.2.$

الجواب
(b) $y(0.1) = 1.11; y(0.2) = 1.25.$

3.8 جد قيمة التكاملات في المسائل التالية بطريقة ميلني للمنبيء المصحح عند $x = 0.4\ ,\ 0.5$ اذا كانت قيمها عند النقاط الاربعة $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3$

كما معطاة

(a) $y' - 4y = 0$;  $y_0 = 1$;  $y_1 = 1.492$;  $y_2 = 2.226$;  $y_3 = 3.320$.
(b) $y' - 2y = 3e^x$;  $y_0 = 0$;  $y_1 = 0.348$;  $y_2 = 0.811$;  $y_3 = 1.415$.
(c) $y' + y = 2e^x$;  $y_0 = 2$;  $y_1 = 2.010$;  $y_2 = 2.040$;  $y_3 = 2.090$.

(a) $y_4 = 4.953$; $y_5 = 7.389$.  (c) $y_4 = 2.162$; $y_5 = 2.256$.

3.9 جد لثلاثة ارقام معنوية . قيمة التكامل في المسألة 3.1 عند $x = 0.4\,(0.1)\,0.6$ باستعمال معادلة ادامز بفروق الى الدرجة الثالثة . استعمل قيم الانطلاق المحسوبة في السؤال 3.1

الجواب $y(0.4) = 2.20$; $y(0.5) = 3.20$; $y(0.6) = 4.49$.

3.10 جد لثلاثة ارقام معنوية . قيمة التكاملات التالية عند $x = 1.0\,(0.1)\,1.6$ باستعمال طريقة ادامز بفروق الى حد الدرجة الثالثة وذلك بعد اطلاق الحل بمتسلسلة تيلر :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}; \qquad y(1) = 1.$$

3.11 جد لثلاثة ارقام معنوية . قيمة التكامل في السؤال 3.2 باستعمال طريقة آدامز بفروق الى حد الدرجة الثالثة .

الجواب $y(2.4) = 1.14$; $y(2.5) = 1.09$; $y(2.6) = 1.04$; $y(2.7) = 1.00$; $y(2.8) = 0.97$.

3.12 جد لاربعة ارقام ذات دلالة . قيمة التكامل التالي عند $x = 0\,(0.1)\,0.6$ باستعمال طريقة آدامز بفروق الى الدرجة الثالثة وذلك بعد اطلاق الحل بمتسلسلة تيلر :

$$y' + y^2 = e^x; \qquad y(0) = 1.$$

3.13 جسم محكم سرعته النهائية 500 قد / ثا عندما يسقط حرا في الهواء . احسب سرعته بدلالة الزمن في الفترة $t = 0\,(1)\,6$ ثانية باستعمال طريقة آدامز بفروق من الدرجة الثانية اذا كانت $v_0 = 200$ قد / ثا وافترضت مقاومة الهواء طردية التناسب مع $v^2$ .

ملاحظة : ان معادلة الحركة $m\ddot{x} + \mu\dot{x}^2 = mg$ حيث $m$ هي الكتلة وتدرك السرعة النهائية عندما تكون $\dot{x} =$ ثابتا :

$$(\dot{x})_t = \sqrt{mg/\mu}.$$

الجواب

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 200 | 226 | 251 | 274 | 296 | 316 | 334 |

**3.14** اسقط جسم من طائرة بواسطة مظلة . سرعته النهائية هي 30 قد / ثا . احسب سرعته في الفترة $t = 0\ (0.1)\ 0.5$ ثا . مفترضا $v_0 = 20$ قد / ثا ومقاومة الهواء طردية التناسب مع $v^{3/2}$

استعمل طريقة آدامز بفروق من الدرجة الاولى .

**3.15** حقل دائرة التوازن لمحرك d-c محاثته ( inductance $L = 200$ هنري ومربوط بالتسلسل مع المقاومة $R$ . تزداد المقاومة طفيفا مع التيار ويمكن التعبير عنها $R = R_0 + ri$ حيث $i$ هو التيار المتدفق ( امبير ) عبر $R$ ، $R_0 = 100$ أوم . $r = 10$ أوم / امبير . عرضت الدائرة الى جهد ثابت $E$ مقداره 120 فولت باغلاق مفتاح . جد التيار( $i(t)$ ) ادامز في الفترة $t = 0\ (0.5)\ 2.5$ ثا وقارن النتيجة بدائرة خطية linear circuit ذات مقاومة $R = 106$ أوم اذا كان $i(0) = 1.2$ أمبير .

الجواب

| $t$ | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
|---|---|---|---|
| $i$ | 1.129 | 1.117 | 1.108 |

**3.16** قيم لثلاثة ارقام معنوية التقريب الاول لتكامل المسالة التالية عند $x = 1.1\ (0.1)\ 1.3$ باستعمال طريقة اويلر – فوكس.

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}; \qquad y(1) = 1.$$

الجواب $y(1.1) = 0.996;\ y(1.2) = 0.986;\ y(1.3) = 0.971.$

**3.17** قيم لثلاث ارقام معنوية التقريبين الاول والثاني لتكامل المسألة التالية عند $x = 0.1\ (0.1)\ 0.4$ باستعمال طريقة اويلر – فوكس مع تصحيح الخطأ .

$$y' - 2y = 3e^x; \qquad y(0) = 0.$$

**3.18** قيم لثلاثة ارقام معنوية التقريبين الاول والثاني لتكامل المسألة التالية عند $x = 1.1(0.1)1.3,$

باستعمال طريقة اويلر – فوكس مع تصحيح الأخطاء .

$$y' - x^2y = x^2; \qquad y(1) = 1.$$

الجواب

$$y(1.1) = 1.24; y(1.2) = 1.58; y(1.3) = 2.10.$$

**3.19** جد معادلات المواترة من نمط اويلر–فوكس (انظر القسمين ، 3.6 ، 3.7 لحل المعادلتين الآتيتين :

$$y' = y + z; \qquad z' = z - y;$$
$$y_0 = 0.1; \qquad z_0 = 0.2.$$

ثم استخدمها لتقييم $y(x)$ ، $z(x)$ في الفترة $x = 0\,(0.1)\,0.3$ مع أهمال التصحيح.

الجواب

$y_1 = 0.1326;\ \ y_2 = 0.1696,\ \ y_3 = 0.2112;\ \ z_1 = 0.2088,\ \ z_2 = 0.2149,$
$z_3 = 0.2176.$

**3.20** قيم لثلاثة ارقام معنوية بطريقة آدامز في الفترة $x = 0\,(0.1)\,0.4$ الدالتين $y(x)$, $z(x)$ اللتين توفيان المعادلات والشروط التالية .

اطلق الحل بمتسلسلة تيلر واستعمل فروقاً الى حد الدرجة الثانية .

(a) $y' = 2z^2 - y,\ \ y(0) = 1; \qquad z' = zy,\ \ z(0) = 1.$
(b) $y' = z - y^2,\ \ y(0) = 1; \qquad z' = zy,\ \ z(0) = 1.$

الجواب

(a) $y(0.3) = 1.492,\ y(0.4) = 1.803;\ z(0.3) = 1.434,\ z(0.4) = 1.683.$
(b) $y(0.3) = 1.041,\ y(0.4) = 1.072;\ z(0.3) = 1.355,\ z(0.4) = 1.506.$

**3.21** قيم بطريقة منبيء – مصحح ميلني تكاملات المسائل التالية عند $x = 0.8,\ 1.0$ اذا كانت قيمها وقيم مشتقاتها الاولى عند $x = 10$ ، $0.2,\ 0.4$ ، $0.6$. كما معطاة.

(a) $y'' + y = 0;\ \ y_0 = 1.00;\ \ y_1 = 0.980;\ \ y_2 = 0.921;\ \ y_3 = 0.825.$
$\quad y'_0 = 0;\ \ y'_1 = -\ 0.199;\ \ y'_2 = +\ 0.389;\ \ y'_3 = -\ 0.565.$
(b) $y'' - y = 0;\ \ y_0 = 0;\ \ y_1 = 0.201;\ \ y_2 = 0.411;\ \ y_3 = 0.637;\ \ y'_0 = 1;$
$\quad y'_1 = 1.020;\ \ y'_2 = 1.081;\ \ y'_3 = 1.185.$

الجواب

(b) $y_4 = 0.8882;\ y_5 = 1.176.$

**3.22** قيم بطريقة منبيء مصحح ميلني تكاملات المسائل التالية عند $x = 0.4, 0.5$ بعد

الحصول على قيمها وقيم مشتقاتها الاولى عند $x = 0.1, 0.2, 0.3$ بمتسلسلة تيلر.

(a) $y'' - y^2 = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$
(b) $y'' - xy = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$

الجواب (b) $y_4 = 1.413; y_5 = 1.526.$

3.23 قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 1.0\ (0.1)\ 1.5$ باستعمال طريقة آدامز – شتورمر بفروق الى حد الدرجه الثانية .
اطلق الحل بمتسلسلة تيلر .

$$y'' + 3xy' + x^2y = e^x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

3.24 قيم لثلاث ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0\ (0.2)\ 1.0$ باستعمال طريقة آدامز –شتورمر بفروق الى حد الدرجة الثانية بعد اطلاق الحل بمتسلسلة تيلر.

$$xy'' + y' + xy = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

الجواب $y(0.6) = 0.912; y(0.8) = 0.847; y(1.0) = 0.766.$

3.25 قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0\ (0.1)\ 0.6$ باستعمال طريقة ادامز – شتورمر بفروق الى حد الدرجة الثانية . اطلق الحل بمتسلسلة تيلر.

$$y'' + yy' = x^2; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

3.26 قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 1.0\ (0.1)\ 1.5$ باستعمال طريقة ادامز – شتورمر بفروق الى حد الدرجة الثانية . اطلق الحل بمتسلسلة تيلر.

$$y'' + y^2y' = x^3; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 1.$$

الجواب $y(1.3) = 1.3053; y(1.4) = 1.4132; y(1.5) = 1.5266.$

3.27 قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0\ (0.1)\ 0.5$ بعد اطلاق الحل بمتسلسلة تيلر.

$$y'' + 2xy = 3x^3 + 1; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

(a) استعمل طريقة ادامز – شتورمر العامة بفروق من الدرجة الثانية.
(b) استعمل معادلة تواتر ادامر – شتورمر النافذة عند غياب $y'$

**3.28** قيم لاربعة ارقام ذات دلالة مكاملة المسألة التالية عند $x = 0\,(0.1)\,0.5$

$$y'' + x^2 y = 3e^x; \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 0.$$

(a) استعمل طريقة ادامز – شتورمر العامة بفروق من الدرجة الثانية.

(b) استعمل معادلة تواتر آدامز– شتورمر النافذة عند غياب $y'$ . أطلق الحل بمتسلسلة تيلر.

الجواب

(a) $y(0.3) = 1.1488$; $y(0.4) = 1.2730$; $y(0.5) = 1.4400$.

(b) $y(0.3) = 1.1489$; $y(0.4) = 1.2731$; $y(0.5) = 1.4400$.

**3.29** ضغطت كرة مرنة كتلتها 1 قليلا على جسم صلد مسطح ثم اطلقت حا السكون عند $t = 0$ عبر عن ازاحة نقطة على الكرة بعيدا عن نقطة التماس ( المسماة المقترب $\alpha$ ) بدلالة الزمن $t$ وبواسطة متسلسلة تيلر . ان المعادلة التفاضلية لحركة الكرة هي

$$m\ddot{\alpha} + k\alpha^{3/2} = 0$$

حيث تمثل $k$ ثابت مرونة الكرة (*) . وتتطلب الشروط الابتدائية .

$$\alpha(0) = \alpha_0; \qquad \dot{\alpha}(0) = 0.$$

قيم $\alpha$ عند $t = 0.1$ و $t = 0.2$ بمفكوك متسلسلة تيلر ثم مدد الحل الى $t = 0.5$ بمعادلة ادامز – شتورمر مفترضا $k = 10$ و $\alpha_0 = 1$ .

**3.30** اطلق صاروخ كتلته $M$ عموديا من سطح الارض $(x = R)$ بسرعة ابتدائية $V_0$ . حدد بطريقة آدامز – شتورمر وفروق من الدرجة الاولى قيمة $x$ لقيم $t = 0\,(1)\,6$ مفترضا كون مقاومة الهواء طردية التناسب مع السرعة وجاذبية الارض عكسية التناسب مع $x^2$ اذا كانت :

$$R = 10; \qquad V_0 = 5; \qquad \mu = 0.1; \qquad k = 1,$$

في نظام وحدات متوائم حيث $\mu$ معامل مقاومة الهواء لوحدته كتلة و $k$ ثابت الجاذبية.

ملاحظة : ان المعادلة التي تحكم الازاحة هي $M\ddot{x} + \mu M\dot{x} + Mk/x^2 = 0$ (**)

الجواب

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 10.00 | 14.75 | 19.03 | 22.90 | 26.41 | 29.58 | 32.45 |

---

(*) انظر تيموشنكو وكوديير . نظرية المرونة . شركة مكرو– هيل . نيويورك 1951 ص 372 ومايليها .

(**) انظر مثلا المعادلات التفاضلية الجزء 9.2 .

3.31 مدد حل المسألة 3.6 الى الفترة 0.2 (0.1)0.5 بطريقة آدامز – شتورمر وباستعمال فروق من الدرجة الثانية.

3.32 يتذبذب جسم كتلته $M$ حرا على منزلق افقي عديم الاحتكاك تحت تأثير لولب غير خطي ، معادلته تساوي $k_0 + rx^2$ يمر الجسم في نقطة الاصل $x = 0$ بسرعة مقدارها $v_0$ . جد قيمة $x$ عند $t = 0(0.5)3$ بطريقة آدامز – شتورمر وباستعمال فروق من الدرجة الثانية وذلك للقيم التالية للثوابت في نظام متوائم للوحدات :

$$M = 1; \quad k_0 = 1; \quad r = \tfrac{1}{2};$$

ملاحظة :
ان المعادلة التي تحكم الحركة هي $M\ddot{x} + (k_0 + rx^2)x = 0.$*
الجواب

| $t$ | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0.478 | 0.823 | 0.892 | 0.658 | 0.236 | −0.244 |

3.33 يتذبذب الجسم في السؤال 3.32 تحت تأثير لولب معادلته $k_0 - rx^2$. حيث $k_0 = 1$ ، $r = \frac{1}{2}$ ويبدأ التذبذب عند $x = 1$ بسرعة صفر . جد قيمة $x$ في الفترة $t = 0\ (1)\ 4$ بطريقة آدامز – شتورمر وفروق من الدرجة الثانية .

3.34 ان معادلة حركة الكترون موضوع في مجال كهربائي ستاتيكي والتي تعزى الى سلك موجب مشحون الى مالانهاية هي**

$$m\ddot{x} + \frac{k}{x} = 0,$$

حيث $x$ هي بعد الالكترون عن السلك . اذا كانت $k/m = 2$ وانطلق الالكترون من السكون على بعد ثمان وحدات من السلك عند $t = 0$ حدد $x$ لقيم $t = 0\ (2)\ 10$ بمعادلة تواتر آدامز – شتورمر باستعمال فروق من الدرجة الثانية .
ملاحظة : افترض ان الالكترون يمكنه عبور السلك من خلال فجوة متناهية .

(*) انظر مثلا . المعادلات التفاضلية . الجزء 9.8.
(**) انظر . مثلا . المعادلات التفاضلية . الجزء 7.5

الجواب

| $t$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 8.000 | 7.496 | 5.943 | 3.026 | −2.620 | −4.630 |

3.35 قيم لثلاث ارقام معنوية التقريبين الاول والثاني لتكامل المسألة التالية عند $x = 0\ (0.2)\ 1.0$ باستعمال طريقة فوكس والحدين الاوليين من مفكوك الخطأ

$$xy'' + y' + xy = 0; \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 0.$$

الجواب : $y(0.4) = 0.960;\ y(0.6) = 0.912;\ y(0.8) = 0.847;\ y(1.0) = 0.766.$

3.36 قيم لاربع ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0\ (0.2)\ 1.0$ باستعمال طريقة فوكس .

$$y'' + 3xy' + x^2y = e^x; \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 1.$$

3.37 ) قيم لثلاث ارقام معنوية التقريبين الاول والثاني لتكامل المسألة التالية عند $x = 0(0.4)2.0$ باستعمال طريقة فوكس والحدين الاوليين من مفكوك الخطأ .

$$xy'' + y' + xy = 0; \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 0.$$

الجواب $y(0.8) = 0.846;\ y(1.2) = 0.671;\ y(1.6) = 0.456;\ y(2.0) = 0.224.$

3.38 ) قيم لثلاث ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0(0.1)0.5$ وباستعمال معادلة تواتر نوميروف .

$$y'' + x^2y = 3e^x; \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 1.$$

قيم $y(0.1)$ بمسلسلة تيلر .

3.39 ) قيم لاربع ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0(0.1)0.5$ بمعادلة تواتر نوميروف .

$$y'' + 2xy = 3x^3 + 1; \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 1.$$

الجواب

Taylor series: $y(0) = 1;\ y(0.1) = 1.105.\ \ y(0.2) = 1.217;\ y(0.3) = 1.335;\ y(0.4) = 1.456;\ y(0.5) = 1.577.$

3.40 ) رقاص رياضي طوله $L$ (الشكل 3.1 ) يمر بالاصل $\theta = 0$ عند $t = 0$ بسرعة زاوية $\dot{\theta} = 1$ زاوية نصف قطرية / ثا . بافتراض الانحراف صغيراً . حدد قيم $\theta$ في الفترة $0(0.1)0.5$

بمعادلة تواتر نوميروف مفترضا $g/L = 20$ ثا$^{-2}$

(a) جد $\theta$ عند $t = 0.1$ . $t = 0.2$ بتقريب $\theta_0 \mu\left(\delta - \frac{\delta^3}{6}\right)$

وتطبيق المعادلة الفروقية عند $t = 0.1$, $t = 0$, $t = -0.1$

(b) جد $\theta$ عند $t = 0.1$ بمتسلسلة تيلر .

3.41 ) يتذبذب رقاص المسألة 3.40 في محيط لزج فيه $\mu = 1.2$ لوحدة الكتلة . جد قيم $\theta$ في الفترة 0(0.1)0.5 بطريقة فوكس .

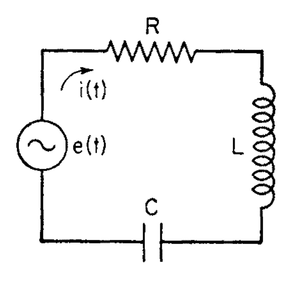
ملاحظة : جد قيمة $\theta$ عند $t = 0.1$ بمتسلسلة تيلر .

الجواب

| $t$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ | 0.091 | 0.155 | 0.182 | 0.171 | 0.130 | 0.068 |

3.42 ) دائرة $R$-$L$-$C$ المربوطة بالتسلسل في الشكل 3.5 تحتوي على محاثة $L = 0.1$ هنرى وسعة $C = 0.05$ ميكروفاراد ($0.05 \cdot 10^{-6}$ farad)

ومقاومة $R = 5000$ أوم . ربطت عناصر الدائرة بالتسلسل مع بطارية ذات 22.5




شكل (٥-٣)

فولت ومفتاح . لاتوجد شحنة ابتدائية $q$ في المكثف ولايتدفق تيار $i$ في الدائرة عند ($t = 0$).

(a) جد الشحنة $q$ بعد اغلاق المفتاح بطريقة فوكس في الفترة $t = 0(0.01)0.04$ .

(b) جد الشحنة في نفس الدائرة اذا كانت $R =$ صفر.

(c) جد الشحنة في نفس الدائرة اذا كانت $R = 2000$ أوم وكان هناك تيار ابتدائي مقداره 5 ميلي امبير بتدفق بنفس اتجاه فولتية البطارية .

ملاحظة : ان معادلة الدائرة الكهربائية التفاضلية هي :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + (1/C)q = e,$$

حيث $e$ هي فولتية البطارية ، ان التيار $i$ هو مشتقة الشحنة $q$ بالنسبة للزمن .

الجواب

| $10^2t$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $q$ | 0.0112 | 0.0439 | 0.0998 | 0.1753 |

3.43 قيم بطريقة نوميروف العامة تكامل المعادلة التالية عند $x = 0.1(0.1)0.4$

$$y^{iv} - (1 - x)y = 0; \quad y_0 = 1; \quad y_0' = 0; \quad y_0'' = 1; \quad y_0''' = 0.$$

الجواب

$$y(0.1) = 1.005; \quad y(0.2) = 1.020; \quad y(0.3) = 1.046; \quad y(0.4) = 1.082.$$

3.44 اشتق معادلة تواتر من مرتبة $h^{10}$ لتكامل المسألة التالية :

$$y'' + c^2y = 0; \quad y_0 = 0; \quad y_0' = 1.$$

3.45 قيم القيمة المميزة الاولى للمسألة التالية بالتكامل الامامي مستعملا $h = 0.1, h = 0.2$ ومفترضا ان $k^2$ طردية التناسب مع $1/L^2$

(a) $y'' + k^2(x/L)^2y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y(L) = 0.$
(b) $y'' + k^2(1 - x/L)y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y(L) = 0.$

الجواب

(a) $k_1 = 5.52.$

3.46 برهن على ان تكامل المعادلة

$$y'' + \omega^2y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0,$$

حطوة فخطوة المقتنى بتعويض $\delta^2 y$ بدلا عن $h^2y''$ يقود الى حد متذبذب بتردد يساوي $1.11\omega$ عندما تكون فترة الزمن $h = T/4.44$ حيث $T = 2\pi/\omega$ هي دورة ( period) الحل الصحيح ، وعلى ان الحل يتباعد لقيم $h > T/\pi$

# الفصل الرابع

# التكامل العددي الى مسائل القيم الحدودية العاديـة

# The Numerical Integration of Ordinary Boundary Value Problems

## 4.1 ) مسائل القيم الحدودية

## *Boundary Value Problems*

ان حل مسائل القيم الحدودية بواسطة الفروق المحدودة يحول تكامل المعادلة التفاضلية الى عملية استخراج جذور مجموعة من المعادلات الجبرية الآنية .ان هذه الجذور ماهي الا قيم الحل المطلوب عند نقاط الارتكاز لمجال التعريف الذي هو احادي البعد بالنسبة للمعادلات التفاضلية العادية.

ان المسائل الحاوية على معادلات تفاضلية عادية من المرتبة الاولى هي بالضرورة من النمط ذي القيمة الاولية غير ان القيم الحدودية تؤول الى معادلات من المرتبة الثانية او من مرتبات اعلى والفردية المرتبة من هذه المعادلات التي تحتوي على شروط اولية مختلفة العدد عند نهايتي الفترة ، صعبة الحل عدديا احيانا والمعتاد ان تحول الى معادلات زوجية المرتبة ( even-order ).وذلك اما بواسطة التكامل او بالتفاضل .

متى كان ذلك ممكنا فان المشتقات في المعادلة التفاضلية تفك بدلالة الفروق المركزية حيث ان دقة المفكوكات هي اعظم من الدقة التي نحصل عليها من الفروق الجانبيـة .

ان المشتقات الموجودة في الشروط الحدودية للمسألة قد يعبر عنها بدلالة الفروق الجانبية أو الفروق المركزية ، وكمثال ذلك فان الشروط الحدودية التالية عند نقطة الاصل قد حولت بموجب المعادلة (2.7.16) الى شروط الفروق المركزية المناظرة لها وذلك باستعمال الحد الاول من مفكوكاتها.

$$\begin{aligned} y(0) &= 0; & y_0 &= 0; \\ y'(0) &= 0; & y_1 - y_{-1} &= 0; \\ y''(0) &= 0; & y_1 - 2y_0 + y_{-1} &= 0; \qquad (4.1.1) \\ y'''(0) &= 0; & y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2} &= 0; \\ y^{iv}(0) &= 0; & y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2} &= 0. \end{aligned}$$

ان هذه المعادلات تستعمل فعلا لتعريف قيم $y_{-2}, y_{-1}$ اللتين تقعان خارج فترة تعريف $y$ ، بدلالة $y_0, y_1, y_2,$ والتي لها خطأ ذو مرتبة هي $h^2$

وعندما نستعمل الفروق المركزية التي مرتبتها $h^2$ في المعادلات ونستعمل الفروق الامامية او الخلفية في الشروط الحدودية الاولية فان هذه الاخيرة ينبغي ايضا أن تكون مرتبة خطئها $h^2$ كلما كان ذلك ممكنا ، ولذلك فان الشروط الواردة ، في المعادلة (4.1.1) مثلا يجب ان يعبر عنها بدلالة مؤشرات الفروق للشكل ( 2.5b ) :

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0; & y_0 &= 0; \\
y'(0) &= 0; & -y_2 + 4y_1 - 3y_0 &= 0; \\
y''(0) &= 0; & -y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0 &= 0; \\
y'''(0) &= 0; & -3y_4 + 14y_3 - 24y_2 + 18y_1 - 5y_0 &= 0; \\
y^{iv}(0) &= 0; & -2y_5 + 11y_4 - 24y_3 + 26y_2 - 14y_1 + 3y_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

## 4.. التكامل خطوة فخطوة لمسائل القيم الحدودية

***Step-by-step Integration of Boundary Value Problems***

من الممكن حل مسائل القيم الحدودية العادية من المرتبة الثانية باساليب الفصل الثالث أي بموجب قوانين التكامل الامامي بالاقتران مع المحاولة والخطأ او بالاساليب الاستكمال لنأخذ مثلا المسألة البسيطة التالية :

$$y'' + y^2 = 0; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 0. \tag{a}$$

فبضرب المعادلة في $h^2$ وباستعمال الفروق المركزية نحصل على معادلة المــواتـــــرة التالية : recurrence equation

$$y_{i+1} = 2y_i - h^2y_i^2 - y_{i-1}, \tag{b}$$

التي تصبح على الصورة التالية عندما $h = \frac{1}{4}$

$$y_{i+1} = 2y_i - \left(\frac{y_i}{4}\right)^2 - y_{i-1}. \tag{c}$$

ولكي نبدأ بالحل ، افرض ان قيمة $y_1 = 1.5$ ثم كامل مكاملة امامية كما هو مبين في العمود الثالث من الجدول 4.1 .وعندما تكون $y_1 = 2.0$ نحصل على النتائج الواردة في العمود الرابع من الجدول 4.1

جدول ( ١-٤ )

| $i$ | $x_i$ \ $y_1$ | $y_1 = 1.5$ | $y_1 = 2.0$ | $y_1 = 1.70$ | $y_1 = 1.6825$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2.00 | 2.00 | 2.00 | 2.0000 |
| 1 | 0.25 | 1.50 | 2.00 | 1.70 | 1.6825 |
| 2 | 0.50 | 0.86 | 1.75 | 1.22 | 1.1881 |
| 3 | 0.75 | 0.17 | 1.31 | 0.65 | 0.6055 |
| 4 | 1.00 | −0.52 | 0.76 | 0.05 | 0.0000 |

وباجراء الاستكمال الخطي بين $y_1 = 1.5$ ,$y_4 = -0.52$ وبين $y_1 = 2.0$ ,$y_4 = 0.76$ نحصل على [ بالمعادلة ( 1.2.7 ) ]

$$y_1 = \frac{1.5 \times 0.76 - 2.0 \times (-0.52)}{0.76 - (-0.52)} = 1.70$$

وعندما $y_1 = 1.70$ فأن المعادلة (c) تعطينا النتائج الواردة في العمود الخامس من الجدول 4.1 .وباجراء الاستكمال بين 1.70,1.5 ينتج :

$$y_1 = \frac{1.5 \times 0.05 - 1.70(-0.52)}{0.05 - (-0.52)} = 1.6825$$

وعندما $y_1 = 1.6825$ فان $y_i$ في العمود السادس من الجدول 4.1 تمثل الجواب الصحيح عندما $n = 4$

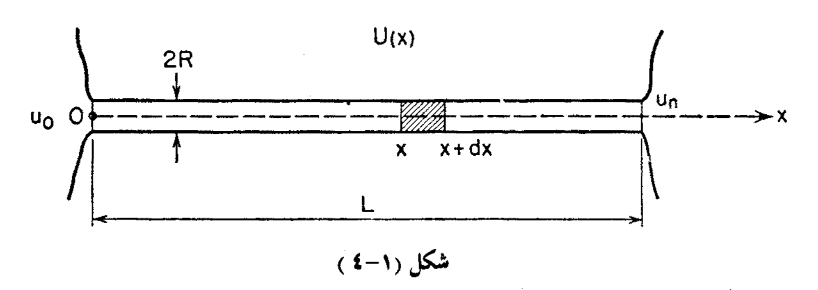
ويمكن استعمال اساليب مماثلة لحل المعادلات ذات المرتبات العالية حيث تستعمل كوسطاء parameters في هذه الحالة بعض القيم الاولى من $y_i$ ثم نحسب الاخطاء في الشروط الحدودية عند نهاية مجال التكامل .وان هذه الطريقة تصبح مرهقة حالما تصبح مرتبة المعادلة اكبر من الثالثة او الرابعة.

## 4.3 حل المسائل من المرتبة الثانية بواسطة الفروق المركزية

***Solution of Second-order Problems by Central Differences***

لكي نوضح الطريقة العامة لحل مسائل القيم الحدودية الاعتيادية بموجب الفروق المركزية فاننا سنأخذ مسألة انتقال الحرارة التي تتناول تعيين درجة الحرارة $u$ لسلك دائري المقطع طوله ( $L$ ) ونصف قطره $R$= يربط جسمان درجة حرارتهما $u_n, u_0$ على

التوالي تبقى ثابتة . ويفقد حرارة الى الوسط المحيط الذي درجة حرارته $U(x)$ (شكل 4.1 )




شكل (١-٤)

وبمساواة الحرارة الداخلة في عنصر طوله $dx$ من السلك مع الحرارة التي تترك سطحه نجد ان المسألة الحدودية هنا تؤول الى :

$$u'' - \frac{2k_1}{kR} u = - \frac{2k_1}{kR} U; \qquad u(0) = u_0; \qquad u(L) = u_n, \quad (4.3.1)$$

حيث

$k =$ التوصيل الحراري للسلك

$k_1 =$ التوصيل الحدودي للسلك

$x =$ محور السلك حيث تقع نقطة الاصل عند نهايته اليسرى

ولاجل تحويل هذه المسألة الى صيغة لابعدية nondimensional اجعل

$$z = \frac{x}{L}; \qquad v(z) = \frac{u(x)}{u_n}; \qquad F(z) = \frac{U(x)}{U(0)},$$

وبذلك نحصل على

$$\begin{aligned} v'' - \frac{2k_1L^2}{kR} v &= - \frac{2k_1L^2}{kR} \frac{U(0)}{u_n} F(z); \\ v(0) = \frac{u_0}{u_n}; &\qquad v(1) = 1, \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

علما بان الفتحات ( primes ) اعلاه تدل على التفاضل بالنسبة الى $z$ وفي حالة خاصة سوف نفترض بان :

$L = 100$ cm; $\qquad R = 1$ cm;

$k = 1$ cal/sec °C cm²/cm;

$$k_1 = 6 \cdot 10^{-4}(\tfrac{3}{2}z + \tfrac{1}{3}) \text{ cal/sec °C cm}^{2*};$$
$$u_0 = 0; \qquad U(0)/u_n = 1;$$
$$F(z) = e^z,$$

بحيث تؤول مسألة القيم الحدودية [ المعادلات ( 4.3.2 ) ] الى

$$v'' - 2(9z + 2)v = -2(9z + 2)e^z; \quad v(0) = 0; \quad v(1) = 1. \qquad (4.3.3)$$

ولكي نحول المعادلات ( 4.3.3 ) الى مسألة الفروق المناظرة فأننا نجزء فترة تعريف المتغير $z$ [ 0,1 ] الى اجزاء متساوية عددها $n$ طول الجزء الواحد $1/n = h$ ، ثم نضرب المعادلة التفاضلية في $h^2$ ومن ثم نعوض ( $\delta^2 v + \epsilon_2$ ) عن $h^2v''$ وفقا الى المعادلــة ( 2.7.16 ) وهكذا تصبح المعادلة على الصورة التالية :

$$v_l - 2v_i + v_r + \epsilon_{2i} - 2h^2(9z_i + 2)v_i = -2h^2(9z_i + 2)e^{z_i}$$

$$v_l - c_{hi}v_i + v_r = -(c_{hi} - 2)e^{z_i} - \epsilon_{2i} \quad (i = 1,2,\ldots,n-1), \qquad (4.3.4)$$

حيث ان :

$$c_{hi} = 2[1 + h^2(9z_i + 2)]. \qquad (4.3.5)$$

والشروط الحدودية في هذه الحالة هي

$$v_0 = 0; \qquad v_n = 1. \qquad (4.3.6)$$

ان المعادلة ( 4.3.4 ) تصدق وتطبق عند $(n-1)$ من نقاط الارتكاز الداخلية أي ان $i = 1, 2, \ldots, n-1$ وهذه تقود الى مجموعة $(n-1)$ من المعادلات الجبرية الخطية في $(n-1)$ من قيم الارتكاز المجهولة $v_i$. عند حل هذه المنظومة تصبح قيمة $v$ معلومة. كما هو مطلوب ، عند $(n+1)$ من نقاط الارتكاز $v_i$ ( $i = 0,1,\ldots,n$ ) وبزيادة تجزئة الفترة، أي بزيادة الفترات . فان دقة الحل تتحسن بغير حدود ، نظريا على الاقــــل .

---

(*) التوصيل الحراري $k_1$ يتغير خطيا بين درجة الصفر و 500 بالنسبة للتقريب الأول

سنحل المسألة الممثلة بالمعادلات ( 4.3.4 ) و ( 4.3.6 ) الان باستعمال $n = 2,3,4,$ على التوالي : أي لقيم $h$ المتناقصة وسوف يهمل التصحيح $\epsilon_{2i}$ في الاول . التقريب عندما $n = 2$ تطبق المعادلة ( 4.3.4 ) عند $z_1 = \frac{1}{2}$ (شكل 4.2a )

$$v_0 = v_l = 0; \quad v_n = v_r = v_2 = 1;$$
$$h = \tfrac{1}{2}; \quad c_{h1} = 2[1 + \tfrac{1}{4}(9 \cdot 0.5 + 2)] = 5.25,$$

وهذه تعطي .

$$0 - 5.25v_1 + 1 = -3.25e^{0.5} = -5.359; \qquad (4.3.7)$$
$$v(\tfrac{1}{2}) = v_1^{(1)} = 1.211.$$

التقريب عندما $n = 3$ تطبق المعادلة ( 4.3.4 ) عند $z_1 = \frac{1}{3},\ z_2 = \frac{2}{3}$ ( شكل 4.2b ) حيث

$$v_0 = 0; \quad v_n = v_3 = 1;$$
$$h = \tfrac{1}{3}; \quad c_{hi} = 2[1 + \tfrac{1}{9}(9z_i + 2)],$$

وهذه تعطي

$z_1 = \frac{1}{3}$ في $0 - 3.1111v_1 + v_2 = -1.1111e^{1/3} = -1.5507;$

$z_2 = \frac{2}{3}$ في $v_1 - 3.7778v_2 + 1 = -1.7778e^{2/3} = -3.4628;$

$$v(\tfrac{1}{3}) = v_1^{(1)} = 0.9599; \quad v(\tfrac{2}{3}) = v_2^{(1)} = 1.4354.$$

التقريب عندما $n = 4$ تطبق المعادلة (4.3.4) عند $z_1 = \frac{1}{4},\ z_2 = \frac{1}{2},\ z_3 = \frac{3}{4}$ ( شكل 4.2c ) حيث

$$v_0 = 0; \quad v_n = v_4 = 1;$$
$$h = \tfrac{1}{4}; \quad c_{hi} = 2[1 + \tfrac{1}{16}(9z_i + 2)],$$

وهذه تعطي :

$z_1 = \frac{1}{4}$ في $-2.5312v_1 + v_2 = -0.6821;$

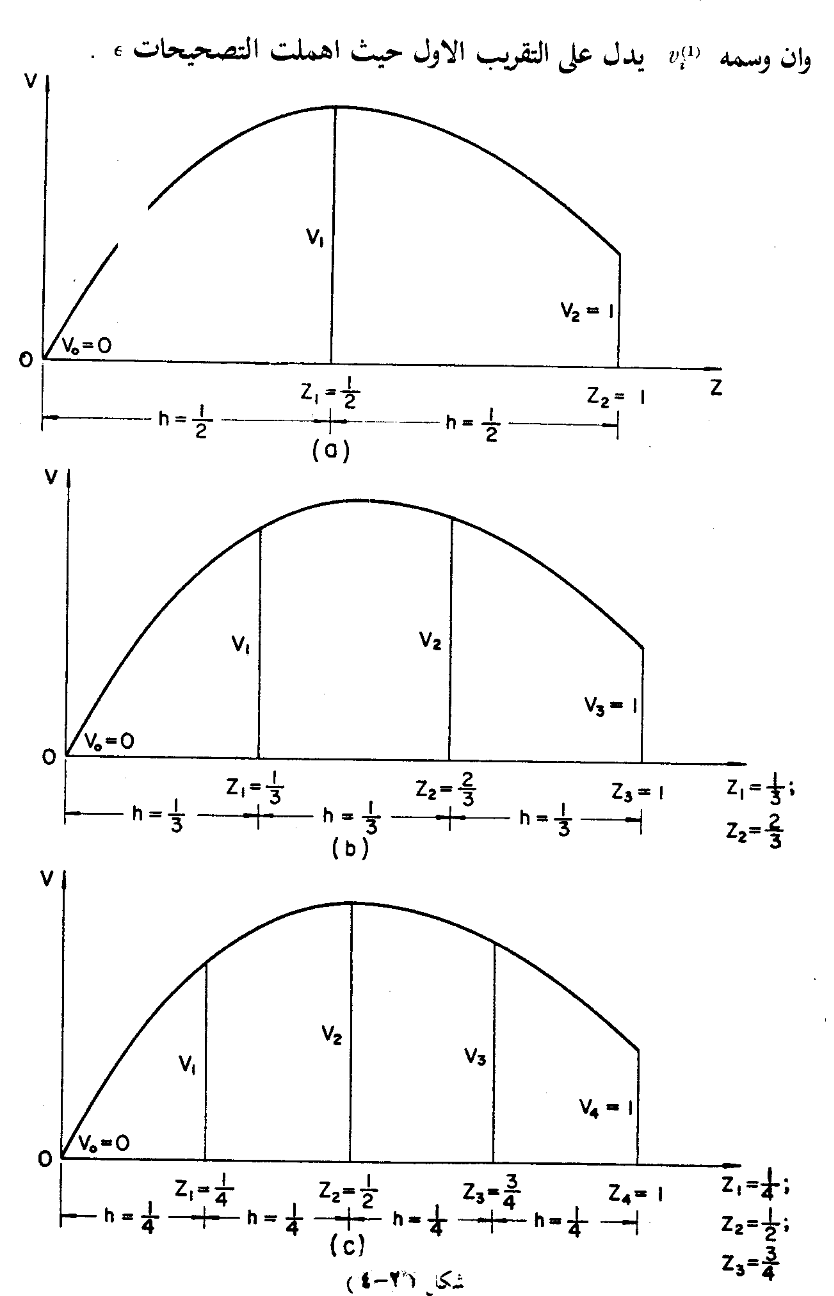
$z_2 = \frac{1}{2}$ في $v_1 - 2.8125v_2 + v_3 = -1.3396;$ (4.3.8)

$z_3 = \frac{3}{4}$ في $v_2 - 3.0938v_3 = -3.3156.$

ان المعادلة ( 4.3.8 ) يمكن حلها بأية طريقة من الطرق التي وردت في الفصل الاول مثال ذلك : ان حل هذه المنظومة بالارخاء كان الذي ادرج بالجدول 1.15 وهو

$$v_1^{(1)} = 0.7753; \qquad v_2^{(1)} = 1.2802; \qquad v_3^{(1)} = 1.4855, \qquad (4.3.9)$$

وان وسمه $v_i^{(1)}$ يدل على التقريب الاول حيث اهملت التصحيحات $\epsilon$ .




شكل (٢-٤)

جدول ( ٢-٤ )

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0.6646 | 0.6915 | 0.7539 | 0.7699 |
| $v_2$ | 1.0682 | 1.2260 | 1.2664 | 1.2767 |
| $v_3$ | 1.4169 | 1.4680 | 1.4810 | 1.4843 |
| $n$ | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $v_1$ | 0.7739 | 0.7750 | 0.7752 | 0.7753 |
| $v_2$ | 1.2793 | 1.2800 | 1.2802 | 1.2802 |
| $v_3$ | 1.4852 | 1.4854 | 1.4855 | 1.4855 |

والحل نفسه نحصل عليه بطريقة المعاودة *iteration* كما في الجدول 4.2 مبتدئين بالقيم $v_2^{(0)} = 1, v_3^{(0)} = 1$

الجدول 4.3 يقدم حل المنظومة ( 4.3.8 ) مرة اخرى بموجب طريقة كولسكي Cholesky وبزيادة عدد نقاط الارتكاز فان خط $v(z)$ البياني يمكن الحصول عليه لاي درجة من الدقة على حساب الجهد الاضافي

جدول ( ٣- ٤ )

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $c$ | 1 | 2 | 3 | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.5312 | −1 | 0 | 0.6821 | 2.5312 | 0 | 0 | 1 | −0.3951 | 0 | 0.2695 |
| 2 | −1 | 2.8125 | −1 | 1.3396 | −1 | 2.4174 | 0 | 0 | 1 | −0.4137 | 0.6656 |
| 3 | 0 | −1 | 3.0938 | 3.3156 | 0 | −1 | 2.6801 | 0 | 0 | 1 | 1.4855 |

$$v_3 = 1.4855; \quad v_2 = 0.6656 + 0.4137 \cdot 1.4855 = 1.2802;$$
$$v_1 = 0.2695 + 0.3951 \cdot 1.2802 = 0.7753$$

انه يمكن زيادة دقة $v(z)$ بجهد اضافي بسط وذلك باستعمال تصحيحات فوكس corrections او بالاستيفاء extrapolation كما سنوضحه فيما بعد.

## 4.4 ) تحسين الحل باستخدام التصحيحات

***Improvement of Solution by Corrections***

### ( a ) نهج كاوس GAUSS'S SCHEME

المعادلات ( 4.3.8 ) قد حلت بموجب نهج كاوس في الخمسة اعمدة الاولى من الجدول ( 4.4 ) وجذورها $v^{(1)}$ التي ظهرت في السطر الاول من الجزء الاسفل من الجدول تطابق ( ضمن وحدة واحدة في الرقم الاخير المعنوي ) الجذور المحسوبة بالارخاء. وبالمعاودة . وبنهج كولسكي.

جدول ( ٤-٤ )

| Rows | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $c$ | $c - \epsilon_2'$ | $c - \epsilon_2''$ | التوضيحات |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2.5312 | 1 | 0 | −0.6821 | −0.7122 | −0.7130 | I |
| 2 | 1 | −2.8125 | 1 | −1.3396 | −1.3697 | −1.3705 | II |
| 3 | 0 | 1 | −3.0938 | −3.3156 | −3.3457 | −3.3465 | III |
| 4 | 2.5312 | −7.1190 | 2.5312 | −3.3908 | −3.4670 | −3.4690 | 2.5312 × (2) |
| 5 | | −6.1190 | 2.5312 | −4.0729 | −4.1792 | −4.1820 | (1) + (4) |
| 6 | | 6.1190 | −18.9310 | −20.2882 | −20.4723 | −20.4772 | 6.1190 × (3) |
| 7 | | | −16.3998 | −24.3611 | −24.6515 | −24.6592 | (5) + (6) |

| التقريب | $v_1$ من السطر الأول | $v_2$ من السطر الثالث | $v_3$ من السطر السابع | لاجل |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.7752 | 1.2801 | 1.4854 | $c$ |
| 2 | 0.7968 | 1.3048 | 1.5032 | $c - \epsilon_2'$ |
| 3 | 0.7974 | 1.3054 | 1.5036 | $c - \epsilon_2''$ |

ان الجذور $v_i^{(1)}$ قد تم استخراجها باهمال التصحيحات $\epsilon$ . ولكي نجد قيم التصحيحات . فان قيم فروق $v_i^{(1)}$ المركزية المتتالية قد دونت في الجدول 4.5 .ولعدم وجود قيم افضل . فان الفرق الرابع افترض ثابتا وهو يساوي $\delta^4 v_2 = -0.3618$ علما بان قيم $\delta^4 v_i$ المفروضة قد وضعت داخل اقواس وباستعمال $\delta^4 v$ والحد الاول من مفكوك $\epsilon_2$ [ المعادلة ( 2.7.16 ) ] تم الحصول على قيمة التصحيح $\epsilon_2$ التقريبية وهي :

$$\epsilon_2' \doteq -\frac{\delta^4 v}{12} = 0.0301,$$

والتي عند تعويضها في المعادلة ( 4.3.8 ) تعطي :

at $z = \frac{1}{4}$ عند $-2.5312v_1 + v_2 = -0.6821 - 0.0301 = -0.7122;$

at $z = \frac{1}{2}$ عند $v_1 - 2.8125v_2 + v_3 = -1.3396 - 0.0301 = -1.3697;$

at $z = \frac{3}{4}$ عند $v_2 - 3.0938v_3 = -3.3156 - 0.0301 = -3.3457.$ (4.4.1)

جدول ( ٥- ٤ )

| $i$ | $v_i$ | $\delta v_{i+1/2}$ | $\delta^2 v_i$ | $\delta^3 v_{i+1/2}$ | $\delta^4 v_i$ | $\epsilon_2'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | |
| | | 0.7752 | | | | |
| 1 | 0.7752 | | −0.2703 | | (−0.3618) | (0.0301) |
| | | 0.5049 | | −0.0293 | | |
| 2 | 1.2801 | | −0.2996 | | −0.3618 | 0.0301 |
| | | +0.2053 | | −0.3911 | | |
| 3 | 1.4854 | | −0.6907 | | (−0.3618) | (0.0301) |
| | | −0.4855 | | | | |
| 4 | 1.0000 | | | | | |

ان معاملات منظومة المعادلات ( 4.4.1 ) هي نفس معاملات المنظومة ( 4.3.8 ) غير ان الثوابت مختلفة . ولذلك يكون من المناسب حلها باضافة عمود جديد من الثوابت الى نهج كاوس الوارد في الجدول 4.4 . اما جذورها $v_i^{(2)}$ فهي في السطر الثاني من اسفل الجدول 4.4 وبحساب فروق $v_i^{(2)}$ نحصل . بالمثل . على القيمة المحسنة $\epsilon_2''$ للتصحيح $\epsilon_2$ وعلى مجموعة جديدة لقيم الثوابت لاعضاء الطرف الايمن من الجدول 4.4 .

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم تقريبية $v_i^{(3)}$ الى $v$ ثم نستمر على هذا المنوال حتى تصبح التصحيحات مستقرة . وفي المسألة التي نتدارسها يحدث هذا عند التقريب الثالث فنصل الى القيم النهائية التي ظهرت في السطر الثالث من الجزء الاسفل للجدول 4.4 بالأمكان استعمال تصحيح فوكس Fox مع التقريب $n = 2$ من المسألة نفسها* وذلك بالتعبير عن التصحيح بدلالة $v^{iv}$ [ المعادلة (2.7.10) ]

$$\epsilon_2 \doteq -\frac{h^4 v^{iv}}{12}. \qquad \text{(a)}$$

نحصل على $v^{iv}$ بتفاضل المعادلة ( 4.3.3 ) مرتين

$$v^{iv} = 2(9z + 2)v'' + 36v' - 2(9z + 20)e^z,$$

(*) المسألة الممثلة بالمعادلات (4.3.4) (4.3.6)

وباستعمال ( المعادلة ( 4.3.3 ) مرة اخرى

$$v^{iv} = 2(9z+2)[2(9z+2)v - 2(9z+2)e^z] + 36v' - 2(9z+20)e^z.$$

وفي هذا التعبير الاخير استعضنا عن $v'$ بمعدل الفرق المركزي المناظر

$$hv'_1 \doteq \mu\delta v_1 = \frac{v_2 - v_0}{2} = 0.5.$$

باستخدام المعادلة (a) عندما $z = \frac{1}{2}$ , $hv'_1 = 0.5$ نحصل على :

$$\epsilon_2^{(1)} = -\frac{h^4 v^{iv}}{12} = 0.619$$

وعليه فالمعادلة المصححة (4.3.7)

$$-5.25v_1 + 1 = -5.359 - 0.619 = -5.978,$$

ومنها ينتج $v_1^{(2)} = 1.329$ وباعادة هذه العملية نحصل بالتعاقب على مايأتي :

$$\epsilon_2^{(2)} = 0.515; \qquad v_1^{(3)} = 1.309;$$
$$\epsilon_2^{(3)} = 0.533; \qquad v_1^{(4)} = 1.313;$$
$$\epsilon_2^{(4)} = 0.529; \qquad v_1^{(5)} = 1.312.$$

كان من الممكن ان نستعمل نفس طريقة تقريب التصحيحات بالمشتقات في الحل عندما $n = 4$

## ( b ) الارخاء Relaxation

يصبح الارخاء كفوءا بوجه خاص وذلك عندما نستعمل تصحيحات فوكس Fox لتحسين النتائج المقربة التي نحصل عليها باستعمال الفروق المحدودة .

لقد وجدنا اعلاه . مثلا . ان التصحيح الاول $\epsilon_2^{(1)} = 0.0301$ طرح من جميع الثوابت في المنظومة ( 4.3.8 ) للحصول على المنظومة المصححة ( 4.4.1 ) . ولذلك فالثوابت $k$ للمنظومة المصححة ( 4.4.1 ) ( التي هي معدة للمعاودة) تساوي الثوابت $k^{(1)}$ للمنظومة غير المصححة ( 4.3.8 ) المهيأة للمعاودة [ المنظومة (c) قسم 1.13 ] زائدا المقدار $\delta k_i^{(1)} = \epsilon_2^{(1)}/a_{ii}$.

$$\delta k_1^{(1)} = \frac{0.0301}{2.5312} = 0.0119;$$

$$\delta k_2^{(1)} = \frac{0.0301}{2.8125} = 0.0107;$$

$$\delta k_3^{(1)} = \frac{0.0301}{3.0938} = 0.0097.$$

ولذلك اذا استعملت الجذور للمنظومة غير المصححة من الجدول 1.15 بمثابة قيم ابتداء فان البواقي $R_i$ تساوي $\delta k_i$، ويمكن احتساب الجذور المصححة بارخاء هذه البواقي .
وكما هو موضح في الجدول 4.6 يمكن استعمال الارخاء الكتلي في الخطوة الاولى مع معاملات مقربة [ المنظومة (d) البند 1.13 ] وباعتبار 200. = $\delta$ ان البواقي النهائية تحسب بمعاملات المنظومة (e) الثامنة البند 1.13 .

جدول ( ٤-٦ )

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7753 | ~~110~~ | 12802 | ~~107~~ | 14855 | ~~97~~ |
| | 200 | ~~-1~~ | 200 | ~~51~~ | 200 | ~~-30~~ |
| | 19 | ~~19~~ | 50 | ~~1~~ | -23 | ~~-23~~ |
| | | -1 | -2 | ~~-9~~ | | -1 |
| | | | | ~~-2~~ | | |
| $v_i^{(2)}$ | 7972 | -1 | 13050 | 1 | 15032 | 0 |

ان التصحيح الثاني $\epsilon_i^{(2)}$ المحسوب بواسطة القيم $v_i^{(2)}$ يقو [illegible] 'وات جديدة هي

$$\delta k_i = \epsilon_i^{(2)}/a_{ii};$$

$$\delta k_1^{(2)} = 0.0122; \qquad \delta k_2^{(2)} = 0.0110; \qquad \delta k_3^{(2)} = 0.0100,$$

والتي تختلف بثلاث وحدات في الموقع الاخير عن الكمية السابقة $\delta k_i^{(1)}$. وعليه فباستعمال القيم $v_i^{(2)}$ الاولية من الجدول 4.6 والفروق 0.0003 بمثابة بواقي نحصل على التقريب الثالث $v_i^{(3)}$ بجهد اضافي بسيط كما هو موضح في الجدول 4.7

جدول ( ٧-٤ )

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 7972 | ~~3~~ 13050 | ~~3~~ 15032 | ~~3~~ |
| | 4 | ~~4~~ 3<br>1 3 | ~~1~~ 4<br>~~3~~ | ~~4~~<br>1 |
| $v_i^{(3)}$ | 7976 | 0 13056 | 0 15036 | 1 |

يمكن الحصول على خط بياني اكثر دقة لدالة درجة الحرارة $v(z)$ بتجزئة فترة التعريف (0,1) الى ستة فترات فرعية عرض الواحدة منها $h = \frac{1}{6}$. ان مجموعة المعادلات الخطية لقيم الارتكاز $v_i$ تصبح في هذه الحالة ، وبموجب المعادلة (4.3.4) منظومة الجدول 4.8 .

وقد ارخيت هذه المنظومة في الجدول 4.9 لقيم ابتداء تّم الحصول عليها بالاستكمال

جدول ( ٨-٤ )

| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $k$ | المعاملات الكتلية |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 0.4557 | | | | 0.1047 | −0.5443 |
| 0.4390 | −1 | 0.4390 | | | 0.1702 | −0.1220 |
| | 0.4235 | −1 | 0.4235 | | 0.2521 | −0.1530 |
| | | 0.4091 | −1 | 0.4091 | 0.3541 | −0.1818 |
| | | | 0.3956 | −1 | 0.8760 | −0.6044 |

الخطي للجذور المناظرة الى $h = \frac{1}{4}$ كما ان البواقي قد جرى تحقيقها بعد الحصول على ثلاث أو اربع أو خمس أرقام معنوية . أما التصحيحات فقد استخرجت قيمها بطريقة الفروق التقريب الثاني للجذور حسبت وايضا قد حسبت فروقها للحصول على تصحيحات للتصحيحات وعليه يكون قد حصلنا أيضا على التقريب الثالث للجذور .

(*) الفرض الفرق السادس ثابتا في هذا المثال .

## جدول ( ٩-٤ )

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | | توضيحات |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.56 | 0 1.00 | −1 1.31 | ~~−3~~ 1.43 | ~~0~~ 1.33 | ~~11~~ | القيم الاولية، والبواقي |
| | | | | 0 6 | ~~5~~ 12<br>−1 | ~~−1~~<br>2 | |
| | 0.560 | ~~0~~ 1.000 | ~~−0~~ 1.310 | ~~−3~~ 1.490 | ~~−7~~ 1.450 | ~~15~~ | الجذور لوحدة واحدة |
| | −6<br>−4 | ~~−8~~ −10<br>~~1~~<br>~~−2~~ −6<br>0 −4 | ~~1~~<br>~~−3~~ −8<br>~~−0~~<br>~~0~~<br>0 −4 | ~~−7~~<br>~~1~~<br>~~−1~~<br>~~−2~~ −3<br>−1 −4 | ~~0~~ 16<br>~~−3~~<br>~~0~~<br>1 −4 | ~~−1~~<br>~~−2~~<br>0 | في المرتبة العشرية<br>ثم تحقيق البواقي<br>الارخاء الكتلي |
| | 0.5500 | ~~18~~ 0.9800 | ~~15~~ 1.2980 | ~~−28~~ 1.4830 | ~~2~~ 1.4620 | ~~7~~ | الجذور لوحدة واحدة |
| | 13<br>5 | ~~0~~<br>~~5~~ 10<br>2 5 | ~~4~~ −28<br>~~10~~<br>~~0~~<br>−1 5 | ~~0~~<br>~~−4~~ −10<br>~~0~~<br>−1 5 | ~~−10~~<br>~~0~~<br>−1 5 | ~~2~~<br>0 | في المرتبة الثالثة<br>العشرية وتحقيق البواقي<br>الارخاء الكتلي |
| | 0.55180 | ~~17~~ 0.98150 | ~~−25~~ ·1.29570 | ~~−10~~ 1.48250 | ~~−2~~ 1.46250 | ~~−2~~ | تحقيق البواقي |
| | −13<br>24<br>−8<br>−5 | ~~24~~ −13<br>~~0~~<br>~~−5~~ −12<br>~~−8~~ −6<br>~~0~~<br>~~−2~~ −4<br>1 −5 | ~~−23~~ −13<br>~~−12~~<br>~~0~~<br>~~−8~~ −13<br>~~0~~<br>~~−4~~<br>~~0~~<br>~~−2~~ −4<br>−1 −5 | ~~−8~~ −13<br>~~−18~~<br>~~0~~<br>~~−2~~<br>~~−4~~<br>~~0~~<br>~~−2~~ −5<br>−1 −5 | ~~0~~ −13<br>~~−5~~<br>~~−3~~ 6<br>~~−5~~<br>~~0~~<br>−1 −5 | ~~0~~<br>~~0~~<br>~~−2~~<br>1 | الارخاء الكتلي<br>الارخاء الكتلي |
| | 0.55178 | 1 0.98110 | −1 1.29535 | −1 1.48227 | 2 1.46238 | 1 | تحقيق البواقي |
| $v_i^{(1)}$ | 0.5518 | ~~5~~ 0.9811 | ~~7~~ 1.2954 | ~~24~~ 1.4823 | ~~53~~ 1.4624 | ~~98~~ | التقريب للجذور الاولى |
| | 115<br>−58<br>−15 | ~~−58~~ 115<br>~~0~~<br>~~−15~~ −32<br>0 | ~~−7~~ 115<br>~~−32~~<br>~~0~~<br>~~−7~~<br>~~−1~~ 13<br>0 3 | ~~0~~ 115<br>~~−8~~<br>~~0~~ 32<br>~~13~~ 16<br>~~0~~<br>~~3~~ 7<br>~~0~~<br>1 2 | ~~32~~ 115<br>~~0~~<br>~~18~~ 38<br>~~0~~<br>~~5~~<br>~~7~~ 6<br>~~0~~<br>~~1~~ 3<br>~~2~~<br>0 | ~~28~~<br>~~38~~<br>~~0~~<br>~~0~~<br>~~0~~<br>~~3~~<br>~~0~~<br>1 | لوحدة واحدة في<br>المرتبة العشرية الرابعة<br>والتصحيحات الاولى<br>الارخاء الكتلي |
| | 0.55600 | ~~7~~ 0.98940 | 1<br>~~0~~ 1.30860 | ~~−5~~ 1.49950 | 1<br>~~18~~ 1.47870 | ~~2~~ | تحقيق البواقي |
| | 18<br>−1 | ~~−3~~ 18<br>~~−1~~ 4<br>0 | ~~4~~ 18<br>0 | ~~−8~~ 18<br>~~−2~~ 15<br>0<br>−1 | ~~15~~ 18<br>~~0~~<br>~~−1~~ −3<br>0 | ~~−8~~<br>~~−8~~<br>0 | الارخاء الكتلي |
| | 0.55617 | 0 0.98962 | −1 1.30878 | 0 1.49982 | ~~0~~ 1.47885 | ~~2~~ | تحقيق البواقي |
| | | | | | 1 2 | 0 | |
| | 0.55617 | 0 0.98962 | −1 1.30878 | 0 1.49982 | 1 1.47887 | 0 | تحقيق البواقي |
| $v_i^{(2)}$ | 0.5562 | ~~3~~ 0.9896 | ~~1~~ 1.3088 | ~~1~~ 1.4998 | ~~2~~ 1.4789 | ~~1~~ | التقريب الثاني للجذور |
| | 7 | −1 7 | 0 7 | 0 7 | 1 7 | 0 | والتصحيحات الثانية<br>الارخاء الكتلي |
| $v_i^{(3)}$ | 0.5569 | 0.9903 | 1.3095 | 1 5005 | 1.4796 | | |

## 4.5 ) تحسين الحل بالاستيفاء

***Improvement of Solution by Extrapolation***

في البنود السابقة لاحظنا ان دوال درجة الحرارة $v(z)$ في مسألة القيم الحدودية ( 4.3.3 ) قد حصلنا عليها بموجب الفروق المركزية . وبوجه خاص قد تم تقريب $h^2v$ بواسطة $\delta^2 v$ ويترتب على هذا خطأ من مرتبة $h^2$ في $v$.

وعليه فانه يمكن استعمال استيفاءات $h^2$ , $(h^2,h^4)$ [ البند ( 2.13 ) ] لتحسين قيمة $v(\frac{1}{2})$ . على سبيل المثال . الجدول ( 4.10 ) يعطينا القيم المقربة الاولى الى $v(\frac{1}{2})$ والتي تم الحصول عليها باتخاذنا $n = 2, 4, 6$ فترات فرعية subintervals كما ان استيفاء $h^2$ الى $n_2/n_1 = 4/2$ والى $n_2/n_1 = 6/4$ وقيم $(h^2,h^4)$ المستوفاة عندما $n_3/n_2/n_1 = 6/4/2$ ادرجت في الجدول نفسه . أما معاملات الاستيفاء فقد اخذت من الجدولين 2.12 ، 2.13 على التوالي :

جدول ( ٤-١٠ )

| $n$ | غير مصححة $v(\frac{1}{2})$ | $n$ | استيفاء -$h^2$ | $n$ | استيفاء -$(h^2,h^4)$ | مصححة $v(\frac{1}{2})$ | $n$ | استيفاء -$h^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1.2110 | 2,4 | 1.3033 | 2,4,6 | 1.3081 | 1.3120 | 2,4 | 1.3050 |
| 4 | 1.2802 | 4,6 | 1.3076 | | | 1.3054 | 4,6 | 1.3105 |
| 6 | 1.2954 | | | | | 1.3095 | | |

ان استيفاء -$h^2$ مثلا

$$v(\tfrac{1}{2})\Big]_{2,4} = 1.3333 \cdot 1.2802 - 0.3333 \cdot 1.2110 = 1.3033$$

يختلف بمقدار 0.16 عن قيمة $v_2^{(3)} = 1.3054$ والتي تم الحصول عليها بموجب اربع فترات فرعية وتصحيحين ( جدول 4.4 ) وبالاسلوب نفسه فان قيمة :

$$v(\tfrac{1}{2})\Big]_{4,6} = 1.8 \cdot 1.2954 - 0.8 \cdot 1.2802 = 1.3076$$

هي 0.08 اقل من قيمة $v_3^{(3)} = 1.3095$ والتي تم الحصول عليها بموجب ستة فترات فرعية وتصحيحين ( جدول 4.9 ) على فرض انها افضل قيمة يمكن الحصول عليها دون اجراء عملية الاستيفاء .

ان الجدول 4.10 يحتوي ايضا على قيم $v(\frac{1}{2})$ التي تم الحصول عليها بموجب فترات فرعية هي على التوالي 6.4.2 المحسنة باستعمال تصحيحات فوكس وبما ان ادخال التصحيح $-\delta^4 v/12$ يكافىء مانحصل عليها عند اخذنا الحدين الاولين من مفكوك الفرق $h^2D^2$ [ المعادلة (2.7.15) ] ، لذلك فان الخطأ في المشتقة الثانية للحل المصحح هو من الرتبة $h^4$ وعليه يجوز تطبيق استيفاءات $h^4$ على قيم $v(\frac{1}{2})$ المصححة .

ان نتائج استيفاء $h^4$ المطبقة على القيم المصححة تظهر في الجدول 4.10 لقيم $n_2/n_1 = 4/2$ وكذلك $n_2/n_1 = 6/4$ وهكذا ، بموجب ماجاء في الجدول 2.14 نحصل على

$$v(\tfrac{1}{2})\Big]_{2,4} = 1.0667 \cdot 1.3054 - 0.0667 \cdot 1.3120 = 1.3050;$$

$$v(\tfrac{1}{2})\Big]_{4,6} = 1.2462 \cdot 1.3095 - 0.2462 \cdot 1.3054 = 1.3105.$$

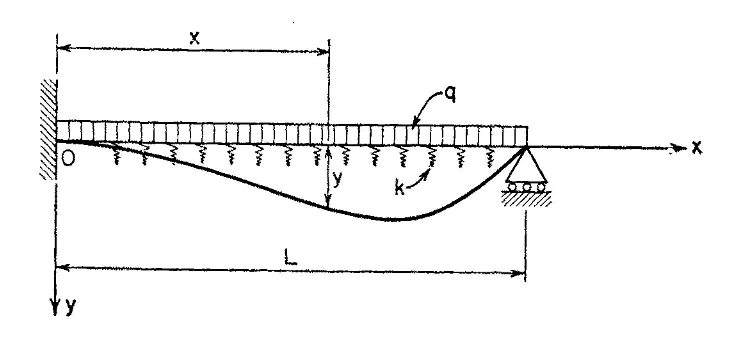
في هذا المثال يبدو بوضوح ان الاستيفاءات في النمط $h^2$ قد تستعمل للاستفادة من مزاياها في توفير جهد اعمال الفروق التي تتطلبها حسابات التصحيحات فيما يتعلق بحلول الفروق المحدودة لمسائل القيم الحدودية ، من المفيد ملاحظة انه يمكن الحصول على تقريبات افضل لمشتقات دالة ما بزيادة عدد الحدود في مفكوك الفروق المحدودة اوبتصغير الفاصلة

ان الاسلوب الاول يتضمن قوانين معقدة وعددا اقل من نقاط الارتكاز وعلى قوانين ابسط . ان التمييز لمعرفة أياً من الاسلوبين افضل يعتمد اساسا على نمط المسألة التي يراد حلها وعلى التدابير الحسابية المتاحة وعلى ذهنية من يحسب ، الا ان تصغير الفاصلة $h$ هو الشيء الوحيد الذي يضمن الاقتراب من الحل الصحيح .

## 4.6 ) حل المسائل العالية المرتبة بالفروق المركزية

***Solution of Higher-order Problems by Central Differences***

كمثال على الحل بالفروق المركزية لمسألة قيم حدودية تشتمل على مشتقات من مرتبات عالية ناخذ المثال التالي الذي يختص بانحراف deflection عتبة تستند على قاعدة مرنة elastic وعليها حمل منتظم $q$




شكل (٣-٤)

لهذه العتبة جسوءة انثنائية ( flexural rigidity ) $EI$ وهي مثبتة في النهاية اليسرى $(x = 0)$ وبسيطة المسند عند الطرف الايمن $(x = L)$ ( شكل 4.3 )

ان مسألة القيم الحدودية التي تتحكم في انحراف العتبة $y$ تتعين بما يأتي ( راجع مثلاً المعادلات التفاضلية البند 10.8 ) :-

$$y^{\text{iv}} + \frac{k}{EI}\,y = \frac{q}{EI}; \qquad (4.6.1)$$
$$y(0) = y'(0) = y(L) = y''(L) = 0,$$

علماً بان $k$ هومعامل الاساس foundation modulus ( وهوالقوة لكل وحدة انحراف لكل وحدة من طول العتبة ) .

ولكي تُحل هذه المسألة بالفروق المركزية من المرتبة $h^2$ . تُحول المعادلة أولاً الى صيغة لا بعدية nondimensional form وذلك بتبديل المتغير $x$ الى متغير $z$ وكالاتي :

$$z = \frac{x}{L}; \qquad \frac{d}{dx} = \frac{1}{L}\frac{d}{dz}; \qquad x = 0, \quad z = 0; \qquad x = L, \quad z = 1,$$

حيث تصبح المعادلة :

$$\frac{d^4y}{dz^4} + \frac{kL^4}{EI}\,y = \frac{qL^4}{EI}$$

ومن ثم تقسم فترة تعريف المتغير $z$ وهي $(0,1)$ الى $n$ من الاجزاء المتساوية طول الجزء الواحد منها $h = 1/n$ ثم تضرب المعادلة كلها بـ $h^4 = 1/n^4$ :

$$\frac{h^4\,d^4y}{dz^4} + \frac{kL^4}{n^4EI}\,y = \frac{qL^4}{n^4EI}.$$

وبتقريب المقدار $h^4\, d^4y/dz^4$ واتخاذ $\delta^4 y_i$

بدلاً منه يحصل :

$$\delta^4 y_i + \frac{kL^4}{n^4EI} y_i = \frac{qL^4}{n^4EI}$$

أو بموجب المعادلات (2.7.16) :

$$y_{ll} - 4y_l + 6y_i - 4y_r + y_{rr} + \frac{kL^4}{n^4EI} y_i = \frac{qL^4}{n^4EI}.$$

اخيراً بجعلنا :

$$\frac{kL^4}{EI} = K, \qquad (4.6.2)$$

تصبح معادلة الفروق (4.6.1) على الصورة التالية :

$$y_{ll} - 4y_l + \left[\frac{K}{n^4} + 6\right] y_i - 4y_r + y_{rr} = \frac{qL^4}{n^4EI}. \qquad (4.6.3)$$

وعند اخذ

$q = 43{,}400$ lbs/in., $L = 120$ in., and $I = 3 \cdot 10^3$ in.$^4$,

$E = 30 \cdot 10^6$ psi, $k = 2{,}604$ psi,

فان الثابت $K$=6 والكمية $qL^4/EI = 100$ وتصبح المعادلة (4.6.3) على الصورة التالية :

$$y_{ll} - 4y_l + 6\left(\frac{n^4+1}{n^4}\right) y_i - 4y_r + y_{rr} = \frac{100}{n^4}. \qquad \text{(a)}$$

ان شروط المعادلة (4.6.1) الحدودية قد حولت الى شروط الفروق المركزية بموجب المعادلة (4.1.1)

$$y_0 = 0; \quad y_{-1} = y_1; \quad y_n = 0; \quad y_{n+1} = -y_{n-1}. \qquad \text{(b)}$$

ان مسألة الفروق المحدودة بالمعادلتين (a), (b) يمكن حلها بان نجعل $h$ تتخذ قيما كبيرة أي أن قيم $n$ تكون صغيرة . كما ان دقة $y$ يمكن زيادتها لأية درجة من الدقة وذلك بزيادة قيمة $n$ في خطوات قيمة كل منها واحد .

التقريب عندما $n = 2$

عندما تكون $n = 2$ ( شكل ( 4.4a ) فان استعمال المعادلة (a) عند $z = \frac{1}{2}$ يعطي

$$y_1 - 4 \cdot 0 + 6\,\frac{2^4+1}{2^4}\, y_1 - 4 \cdot 0 - y_1 = \frac{100}{2^4},$$

ومن هذه نجد ان : $y(\frac{1}{2}) = y_1 = 0.98$

التقريب عندما $n = 3$

عندما $n = 3$ كما في ( شكل 4.4b ) فالمعادلة (a) تعطي

$$z = \frac{1}{3} \text{ في } y_1 + 6\frac{3^4+1}{3^4}y_1 - 4y_2 = \frac{100}{3^4};$$

$$z = \frac{2}{3} \text{ في } -4y_1 + 6\frac{3^4+1}{3^4}y_2 - y_2 = \frac{100}{3^4},$$

ومن هذه ينتج :

$$y(\tfrac{1}{3}) = y_1 = 0.56; \qquad y(\tfrac{2}{3}) = y_2 = 0.69.$$

التقريب عندما $n = 4$

عندما $n = 4$ كما في الشكل ( 4.4c ) فالمعادلة (a) تعطينا

$$z = \frac{1}{4} \text{ في } y_1 + 6\frac{4^4+1}{4^4}y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{100}{4^4};$$

$$z = \frac{1}{2} \text{ في } -4y_1 + 6\frac{4^4+1}{4^4}y_2 - 4y_3 = \frac{100}{4^4};$$

$$z = \frac{3}{4} \text{ في } y_1 - 4y_2 + 6\frac{4^4+1}{4^4}y_3 - y_3 = \frac{100}{4^4},$$

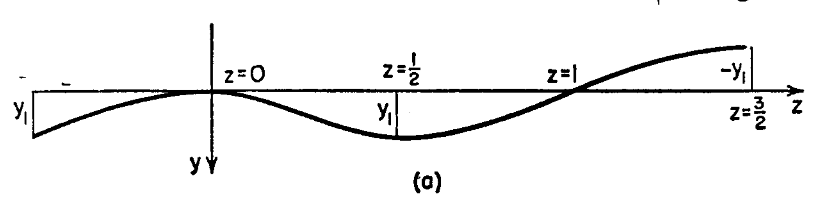
ومنها ينتج :

$$y(\tfrac{1}{4}) = y_1 = 0.34; \quad y(\tfrac{1}{2}) = y_2 = 0.64; \quad y(\tfrac{3}{4}) = y_3 = 0.51.$$

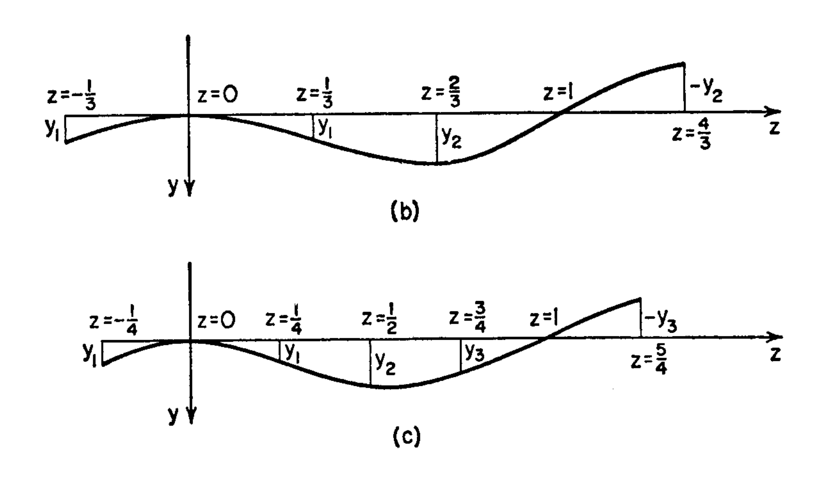
ان قيمة $y$ عند $z = \frac{1}{2}$ يمكن تحسينها باستيفاء $h^2$ باستعمال حلي $n = 2$ ، $n = 4$

$$y(\tfrac{1}{2})\Big]_{2,4} = 1.333 \cdot 0.64 - 0.333 \cdot 0.98 = 0.53,$$

وفيها خطأ قدره 3.9 بالمائة عند مقارنة هذه القيمة مع القيمة التي نحصل عليها من الحل المحكم للمسألة نفسها




جدول ( ٤-٤ )




شكل ( ٤-٤ )

## 4.7 ) حل مسائل القيم المميزة

***Solution of Characteristic Value Problems***

سنورد في هذا البند طريقة لحل مثل هذه المسائل تعتمد على استعمال الفروق المحدودة وعلى الاستيفاءات ( لزيادة الاطلاع انظر البند 3.12 بما يتعلق بالطريقة التي تعتمد على عمليات التكامل الامامية) .

كمثال على مثل هذه الحلول اليك مسألة اويلر Euler الخاصة بحدل عتبة بسيطة المسند عند الطرف الايمن $(x = L)$ ومبنية عند نهاية الطرف الايسر $(x = 0)$ والتي تقع تحت تأثير قوى محورية ضاغطة $P$ ( كما في الشكل 4.5 ) ان الانحرافات $y$ لمحور العتبة $x$ تتغير بمعادلة القيم المميزة التالية :

$$y^{\text{iv}} + \frac{P}{EI} y'' = 0;$$
$$y(0) = y'(0) = y(L) = y''(L) = 0, \tag{4.7.1}$$

حيث $EI$ تمثل الجسوءة الانثنائية flexural rigidity للعتبة .

يمكن الحصول على مسألة الفروق المناظرة وذلك بالتعويض عن المشتقات في المعادلة وفي الشروط الحدودية بما يقابلها من مؤثرات الفروق المركزية في الشكل 2.8a او المعادلة (2.7.16) ولهذا الغرض ندخل اولا تبديل المتغير حيث نجعل :

$$z = \frac{x}{L}; \qquad \frac{d}{dx} = \frac{1}{L}\frac{d}{dz}; \qquad x = 0, \quad z = 0; \qquad x = L, \quad z = 1,$$

حيث تختزل المعادلة (4.7.1) الى صيغة لابعدية : -

$$y^{iv} + \frac{PL^2}{EI} y'' = 0, \qquad \text{(a)}$$

علما بان المشتقات هي الان بالنسبة الى $z$ وبقسمة فترة التعريف (0,1) الى $n$ من الاقسام المتساوية طول الواحد منها $h = 1/n$ ثم بضرب المعادلة (a) في $h^4$ تصبح المعادلة :

$$h^4 y^{iv} + \frac{PL^2}{n^2 EI}(h^2 y'') = 0.$$

وبتعويض $\delta^4 y_i$ عن $h^4 y^{iv}$ وتعويض $\delta^2 y_i$ عن $h^2 y''$ فان هذه التعويضات تعطينا معادلة الفروق التالية :

$$\delta^4 y_i + k_n \delta^2 y_i = 0, \qquad \text{(b)}$$

حيث

$$k_n = \frac{PL^2}{n^2 EI} = \frac{1}{n^2} K_n. \qquad (4.7.2)$$

وباستعمال المعادلات (2.7.16) بدلا عن $\delta^2 y_i, \delta^4 y_i$ تصبح معادلة الفروق المحددة :

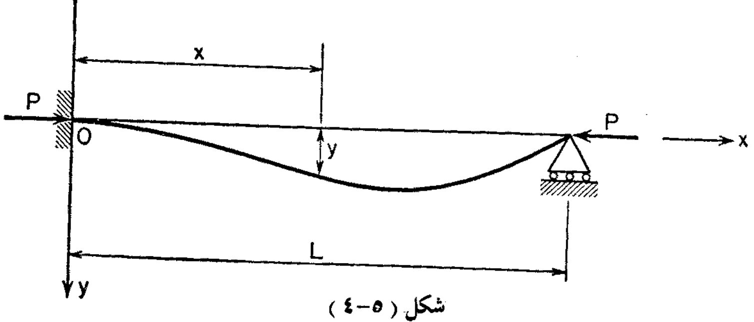
$$y_{ll} - 4y_l + 6y_i - 4y_r + y_{rr} + k_n(y_l - 2y_i + y_r) = 0$$

واخيرا فان هذه المعادلة يمكن كتابتها على الوجه التالي :

$$y_{ll} + (k_n - 4)y_l + (6 - 2k_n)y_i + (k_n - 4)y_r + y_{rr} = 0. \qquad (4.7.3)$$

ان المعادلة (4.7.3) صحيحة عند $n - 1$ من نقاط الارتكاز الداخلية $i = 1, 2, \ldots, n - 1$

ان الشروط ( 4.7.1 ) يجب ان تحقق عند نهايتي العتبة ، وبتعويض معادلات الفروق المركزية ( 2.7.16 ) فيها تتحول هذه الشروط الى معادلات الفروق (4.1.1)




شكل ( ٥-٤ )

$$y_0 = 0; \quad y_{-1} = y_1; \quad y_n = 0; \quad y_{n+1} = -y_{n-1}, \qquad (4.7.4)$$

علما بان $y_{-1}$ و $y_{n+1}$ هي انحرافات نقاط الارتكاز ، على محور العتبة ، الممتدة بمقدار $h$ بعيدا عن موضع الاسناد . ان المجموعة المؤلفة من $n - 1$ من المعادلات الجبرية المتجانسة لها حل صفري هو $y_i = 0$ يناظر الصورة المستقيمة لتوازن العتبة الا أنه قد يكون لها حل لاصفري على شرط أن تكون محددة المعاملات $\Delta$ ( والتي هي دالة $k_n$ ) تطابق الصفر. ان معادلة المحددة : ( $\Delta(k_n) = 0 \cdots 4.7.5$ هي معادلة جبرية ، ولتكن مرتبتها $p$. في $k_n$ وجذورها هي التقريبات لاول $p$ من القيم المميزة $k$ أي لأول $p$ من الأحمال الحرجة $P$ وحيث ان القيمة الحرجة الاولى هي القيمة الوحيدة المهمة عمليا فان المعادلة المحددة ( موضوعة على شكل محددة) سوف تحل لأصغر جذر $k$.

من المناسب ان نبدأ الحل بقيم $n$ صغيرة ومن ثم نزيد قيمة $n$ تدريجيا بمعنى ان نجعل الفاصلة $h$ لنقاط الارتكاز تؤول الى $1/n$

التقريب $n = 2$ :

عندما $n = 2$ ( شكل 4.4a ) المعادلة (4.7.3) تعطينا

$$y_1 + (k_2 - 4) \cdot 0 + (6 - 2k_2)y_1 + (k_2 - 4) \cdot 0 - y_1 = 0,$$
$$(6 - 2k_2)y_1 = 0.$$

ولكي تختلف $y_1$ عن الصفر فان $6 - 2k_2$ يجب ان تتلاشى $k_2 = 3$ وان

$$K_2 = 2^2 k_2 = 12.$$

التقريب $n = 3$ :-

عندما $n = 3$ شكل (4.4b) فالمعادلة (4.7.3) تعطينا :

$$y_1 + (6 - 2k_3)y_1 + (k_3 - 4)y_2 = 0; \quad \text{في } z = \tfrac{1}{3}$$
$$(k_3 - 4)y_1 + (6 - 2k_3)y_2 - y_2 = 0; \quad \text{في } z = \tfrac{2}{3}$$

او ان

$$(7 - 2k_3)y_1 + (k_3 - 4)y_2 = 0;$$
$$(k_3 - 4)y_1 + (5 - 2k_3)y_2 = 0.$$

ان محددة هذه المنظومة الخطية التي تساوى بالصفر هي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة الى $k_3$:

$$\begin{vmatrix} (7 - 2k_3) & (k_3 - 4) \\ (k_3 - 4) & (5 - 2k_3) \end{vmatrix} = (7 - 2k_3)(5 - 2k_3) - (k_3 - 4)^2$$
$$= 3k_3^2 - 16k_3 + 19 = 0,$$

وجذرها الاصغر يساوى $1.78475$ ولذلك فان

$$K_3 = 3^2 k_3 = 16.063$$

التقريب $n = 4$

عندما $n = 4$ شكل (4.4c) . المعادلة (4.7.3) تعطينا :

$$z = \tfrac{1}{4} \text{ في } y_1 + (6 - 2k_4)y_1 + (k_4 - 4)y_2 + y_3 = 0;$$
$$z = \tfrac{1}{2} \text{ في } (k_4 - 4)y_1 + (6 - 2k_4)y_2 + (k_4 - 4)y_3 = 0;$$
$$z = \tfrac{3}{4} \text{ في } y_1 + (k_4 - 4)y_2 + (6 - 2k_4)y_3 - y_3 = 0.$$

الجذر الاصغر لمعادلة المحددة المناظرة هو $k_4 = 1.11075$ ومن هذه ينتج

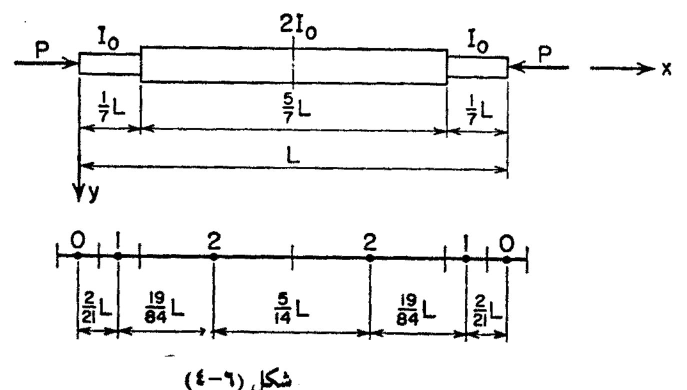
$$K_4 = 4^2 \cdot 1.11075 = 17.772.$$

انه بالامكان ان نبرهن* ان الخطأ في القيمة المتميزة $K$ . وللمعادلة التي معاملاتها ثابتة . الناتجة من الفروق المركزية هي ايضا من مرتبة $h^2$ ولذلك فانه يمكن استعمال استيفاءات $h^2$-, $(h^2,h^4)$ التي استخرجت قيمتها بموجب معاملات البند 2.13 لتحسين نتائج الحسابات . الجدول 4.11 يحتوي على قيم $K_n$ . واستيفاءاتها ، والنسب المئوية للاخطاء المحسوبة بموجب القيمة الحقيقية $K = 20.187$.

جدول (١١-٤)

| $n$ | $K_n$ | $e(\%)$ |
|---|---|---|
| 2 | 12.000 | −40.5 |
| 3 | 16.063 | −20.4 |
| 4 | 17.772 | −12.0 |
| $n$ | $h^2$-extr. | $e(\%)$ |
| 2,3 | 19.313 | −4.3 |
| 3,4 | 19.969 | −1.1 |
| $n$ | $(h^2,h^4)$-extr. | $e(\%)$ |
| 2,3,4 | 20.189 | 0.01 |

(*) انظر سلفادوري الحسابات العددية لأحمال الحدل بالفروق المحدودة" Trans. ASCE, 117 (1951) ص ٢٥٦ ، .




شكل (٦-٤)

ان الزيادة في الدقة . اليسيرة الاقتناء بالاستيفاء . تتحقق فقط بزيادة عدد نقاط الارتكاز ومن ثم حل معادلة محددة درجتها عالية .

## 4.8 استعمال نقاط ارتكاز غير منتظم الفواصل :

***The Use of Unevenly Spaced Pivotal Points***

ان مؤثرات الفروق المحددة التي استعملت في البنود السابقة اعتمدت استعمال نقاط ارتكاز منتظمة ( متساوية ) الفواصل . غير ان من الافضل حل العديد من المسائل الفيزيائية باستعمال فواصل غير منتظمة ( غير متساوية ).

كمثال على استعمال القوانين او القواعد بفواصل غير متساوية . ناخذ المثال الذي يتناول حدل العتبة المدرجة buckling of a "stepped" beam, البسيطة المسند في نهايتها $x = L, x = 0$ وتقع تحت تاثير قوى محورية $P$ والتي عزم قصورها الذاتي يتغير كما هو مؤشر في الشكل 4.6

ولكي نحل مسألة القيم الحدودية المناظرة ( انظر مثلا المعادلات التفاضلية البند 2.11

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0; \qquad y(0) = y(L) = 0, \tag{4.8.1}$$

يقسم الجزء المركزي للعتبة الى قسمين متساويين بنقاط ارتكاز (2) عند نقاط الربع quarter - points . اما طرفي العتبة ففي كل منهما نقطة ارتكاز واحدة (0) في النهاية ونقطة اخرى (1) عند ثلثي طولها من النهاية .

وفي هذه القسمة نجد ان الجزء المركزي يتالف من كومتين طول كل منهما هو $\frac{1}{2}(\frac{5}{7}L) = (\frac{5}{14})L$ .

مع عزم قصور ذاتي $2I_0$ . وكل طرف يتألف من كومتين طولها هو $\frac{2}{3}(\frac{1}{7}L) = (\frac{2}{21})L$

وبعزم قصور ذاتي $I_0$ . كما ان نصف احد هذه الكوم يقع فعلا خارج نهايتي العتبة وحيث ان الفاصلة $h$ بين نقاط الارتكاز تتغير من نقطة لاخرى . فان المشتقة الثانية الواردة في المعادلة (4.8.1) تقرب بالمعادلة (2.2.3) :

$$h^2y'' = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)}\left[\alpha y_l - (1+\alpha)y_i + y_r\right], \qquad \text{(a)}$$

حيث (b)

$$h = x_i - x_l; \qquad \alpha = \frac{x_r - x_i}{x_i - x_l}.$$

المعادلات (b) تعطينا بالنسبة للمسألة الحالية :

في (1) $h_1 = \frac{2}{21}L; \qquad \alpha_1 = \frac{\frac{19}{84}}{\frac{2}{21}} = 2.375;$

في (2) $h_2 = \frac{19}{84}L; \qquad \alpha_2 = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{19}{84}} = 1.579.$

ولذلك بضرب المعادلة (4.8.1) في $h_i^2$ وتعويض المعادلة (a) بدلا عن $h^2y''$ فان معادلات الفروق تصبح .

عند (1)

$$\frac{2}{2.375(1+2.375)}\left[2.375\cdot 0 - (1+2.375)y_1 + y_2\right] + \frac{P}{EI_0}\left(\frac{2}{21}L\right)^2 y_1 = 0,$$

عند (2)

$$\frac{2}{1.579(1+1.579)}\left[1.579y_1 - (1+1.579)y_2\right] + \frac{P}{E(2I_0)}\left(\frac{19}{84}L\right)^2 y_2 = 0$$

او تكون :

$$(0.03635K - 3.375)y_1 + y_2 = 0;$$
$$1.579y_1 + (0.05208K - 1.579)y_2 = 0,$$
$$K = \frac{PL^2}{EI_0}. \qquad \text{(c)}$$

حيث ان المعادلة المحددة المناظرة :

$$\begin{vmatrix} 0.03635K - 3.375 & 1 \\ 1.579 & 0.05208K - 1.579 \end{vmatrix} = 0$$

جذرها الاصغر $K = 19.01$ ومنها ينتج :

$$P_{cr} = 19.01\,\frac{EI_0}{L^2}.$$

ان قيمة $P_{cr}$ المستخرجة بطريقة الطاقة وبغرض انحراف على شكل دالة جيب . والذي من المعروف انها الحد الاعلى لحمل الحدل . تساوي 19.04 ( للاطلاع على طريقة اخرى انظر الاسلوب العددي في حساب التغيرات تأليف Newmark,

# تمارين

**4.1** عبر عن شروط المعادلة (4.12) الاولية بدلالة :

(أ) الفروق الامامية Forward differences حيث الاخطاء من المرتبة $h$

(ب) الفروق الامامية Forward differences حيث الاخطاء من المرتبة $h^2$

**الاجوبة**

(a) $y_0 = 0$; $y_1 = y_0$; $y_2 = 2y_1 - y_0$; $y_3 = 3y_2 - 3y_1 + y_0$; $y_4 = 4y_3 - 6y_2 + 4y_1 - y_0$. (b) $y_0 = 0$; $y_2 = 4y_1 - 3y_0$; $y_3 = 4y_2 - 5y_1 + 2y_0$; $y_4 = (\frac{14}{3})y_3 - 8y_2 + 6y_1 - (\frac{5}{3})y_0$; $y_5 = (\frac{11}{2})y_4 - 12y_3 + 13y_2 - 7y_1 + (\frac{3}{2})y_0$.

**4.2** استخرج قيمة التكامل الامامي والاستكمال الخطي لقيم الارتكاز الى تكاملات المسائل الحدودية القيمة التالية مستعملاً المؤثرات عندما يكون الخطأ من المرتبة $h^2$ وعدد الفترات الفرعية المؤشرة كل ازائه :

$$\text{(a)}\quad y'' + \frac{1}{x}y = 0; \qquad y(1) = 1, \quad y(2) = 2; \qquad n = 2, 4.$$

$$\text{(b)}\quad y'' + (\sin x)y = 0; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 1; \qquad n = 2, 4.$$

$$\text{(c)}\quad y'' + y'y = 0; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 1; \qquad n = 4, 6.$$

**الاجوبة**

(a) $n = 4$; $y_{-1} = 0.586$; $y_1 = 1.351$; $y_2 = 1.635$; $y_3 = 1.850$.

**4.3** جد ( بموجب متسلسلة تيلر ) الحدود الثلاثة الاولى اللاصفرية الى مفكوكات المتسلسلات في حل المسائل التالية معتبرا $y'_0$ , $\theta'_0$ كمجاهيل يجب تعيينها بموجب الشروط الحدودية التالية :—

$$\text{(a)}\quad \theta'' + \sin\theta = 0; \qquad \theta(0) = 0, \quad \theta(1) = 1.$$

$$\text{(b)}\quad y'' + y^2 = x^2 + 1; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

**الاجوبة**

$$\text{(b)}\quad y = \begin{cases} -0.5574x + 0.5x^2 + 0.0574x^4 \\ 12.56x + 0.5x^2 - 13.06x^4. \end{cases}$$

**4.4** عين قيم $y$ في نقاط الارتكاز ذات الفترة (0,1) اذا علمت ان $y$ تحقق المسألة الحدودية القيمة التالية :

$$y'' + 4y = 4x^2 + 2; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

استعمل $n = 2$ ثم $n = 4$ . قارن بين النتائج مع الحل المحكم للمسألة $(y = x^2)$ مبينا سبب تطابق الحل المحكم مع الحل العددي مهما كانت قيم $n$ عندما تقرب $y''$ بواسطة $\delta^2 y/h^2$ .

4.5 (أ) حل المسألة الحدودية القيمة التالية بموجب قوانين الفرق المركزي عندما يكون الخطأ من المرتبة $h^2$ مستعملاً فترتين فرعيتين أو اربع فترات فرعية

$$y'' - 4y' + 4y = e^{3x}; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = -2.$$

حل نظام المعادلات الآنية بنهج كاوس .

(ب) استخدام الحد الأول من تصحيح فوكس الى قيم $y$ في التقريب حيث $n = 2$

(ج) أعدْ (ب) عندما $n = 4$

(د) استعمل القيمة غير المصححة الى $y$ عندما $n = 2$ أو $n = 4$ استخرج قيم $y$ المحسنة عندما $x = 0.5$ بطريقة الاستيفاء .

(هـ) اعد (د) لقيم $y$ **المصححة** ( من الجزئين ط . c )

الاجوبة

(a) $y_2^{(1)}(0.50) = -1.121$; $y_4^{(1)}(0.25) = -0.3473$; $y_4^{(1)}(0.50) = -0.9508$; $y_4^{(1)}(0.75) = -1.7257$. (b) $y_2^{(2)}(0.50) = -0.7840$. (c) $y_4^{(2)}(0.25) = -0.3294$; $y_4^{(2)}(0.50) = -0.9167$; $y_4^{(2)}(0.75) = -1.6884$. (d) $y_{2,4}^{(1)}(0.50) = -0.8941$. (e) $y_{2,4}^{(2)}(0.50) = -0.9256$.

4.6 (أ) حل المسألة الحدودية القيمة التالية بموجب قوانين الفرق المركزي ذات الخطأ من مرتبة $h^2$ مستعملا اثنين واربع فترات فرعية .

$$y'' - 8y' + 8y = e^x; \qquad y(0) = 0, \quad y(3) = 4.$$

حل نظام المعادلات الآنية بطريقة كولسكي .

(ب) استخدم الحد الأول من تصحيح فوكس الى قيم $y$ عند التقريب حيث $n = 2$

(ج) اعد (ب) عندما $n = 4$

(د) استخدم قيم $y$ غير المصححة حيث $n = 2$ أو 4 وثم جد قيم $y$ المحسنة عندما $x = 1.5$ ومستعملا طريقة الاستيفاء .

4.7 حل مسألة سريان الحرارة الواردة في البند 4.3 على فرض ان

$$L = 100\text{ cm}, R = 1\text{ cm}, k = 1\text{ cal/sec °C cm}^2/\text{cm}, k_1 = 6 \cdot 10^{-4},$$

وبقيم $U(x)$ كما معطاة في الجدول التالي

$L = 100$ cm, $R = 1$ cm, $k = 1$ cal/sec °C cm²/cm, $k_1 = 6 \cdot 10^{-4}$, $u_0 = 1$,

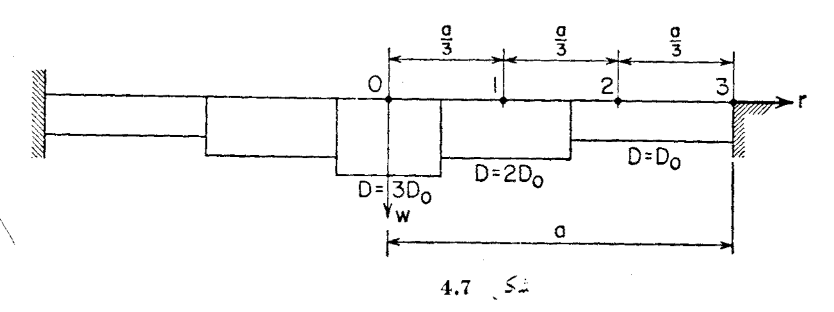
علما بأن $(x)$ محددة بالجدول التالي

| $z = x/L$ | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 1.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(z) = U(x)/u_0$ | 1.00 | 1.10 | 1.35 | 1.15 | 1.00 |

الاجوبة

$v_0 = 0; v_1 = 0.658; v_2 = 0.984; v_3 = 1.035.$

4.8 صفيحة دائرية الشكل مدرجة نصف قطرها (a) كما في الشكل 4.7 وقد ثبتت بحافتها تنحرف تحت تأثير حمل منتظم $q$ .




شكل 4.7

(أ) عين الميل $\phi(r)$ بموجب المعادلة التالية :

$$\phi'' + \frac{1}{r}\phi' - \frac{1}{r^2}\phi = \frac{-qr}{2D}$$

والتي شروطها الحدودية هي :

$$\phi(0) = 0; \qquad \phi(a) = 0,$$

علما بأن $r$ هي المسافة النصف قطرية وان $D$ هي الجسوءة الانثنائية flexural rigidity الخاصة بالصفيحة ( انظر مثلا المرجع نظرية الصحائف والقشر تأليف ثيمو تشينكو او بنوسكي كريجر الناشر شركة ماكروهل )

(ب) عين انحراف المركز بالتكامل العددي مستعملا قاعدة الشبه المنحرف

**4.9** حل السؤال 4.8 في حالة كون الصفيحة ترتكز ارتكازا بسيطا وتحقق الشروط الحدودية التالية :

$$\phi(0) = 0; \qquad \phi' + \frac{\nu}{r}\phi \Big]_{r=a} = 0,$$

على فرض ان نسبة بواسان $\nu = 0.3$ Poisson's ratio

الجواب

$\phi(a/3) = 0.046qa^3/D_0$; $\phi(2a/3) = 0.085qa^3/D_0$; $\phi(a) = 0.096qa^3/D_0$; $w_0 = 0.60qa^4/D_0$.

**4.10** عين قيم $y$ في نقاط الأرتكاز للفترة (0,1) اذا علمت ان $y$ تحقق مسألة القيم الحدودية التالية :

$$y''' + 2y = 12x^2 + 2; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

(أ) استخرج قيمة $y$ التقريبية مستعملا $n = 2$ بموجب الفروق المركزية الموسّطة ( averaged ) . وكذلك جد $y'''$ بموجب العبارة غير المتماثلة للمعادلة (2.2.2)

(ب) استعمل $n = 3$ وقرب $y'''$ عند $x = \frac{1}{3}$ بموجب المعادلة (2.2.2) عند $x = \frac{2}{3}$ بموجب الفروق المركزية المؤسطة .

الجواب

(a) $y_1 = \frac{5}{34} = 0.147$. (b) $y_1 = 0.186$, $y_2 = 0.149$.

**4.11** عين قيم $y$ في نقاط الارتكاز للفترة (0,1) اذا علمت ان $y$ تحقق المسألة الحدودية القيمة التالية ومستعملا $n = 3$ والتقريبات المتماثلة للمشتقات .

$$y^{iv} + 81y = 81x^2; \qquad y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0.$$

**4.12** عين قيم $y$ في النقاط المحورية للفترة ( 0,1 ) اذا علمت ان $y$ تحقق مسألة القيم الحدودية التالية ومستعملا $n = 3$ والتقريبات المتماثلة للمشتقات .

$$y^{iv} + 81y = f(x); \qquad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0.$$

(أ) افرض ان $f(x) = 729x^2$

(ب) حل المسألة نفسها عندما الدالة $f(x)$ في الطرف الأيمن من المعادلة

التفاضلية تتعين بالجدول التالي :

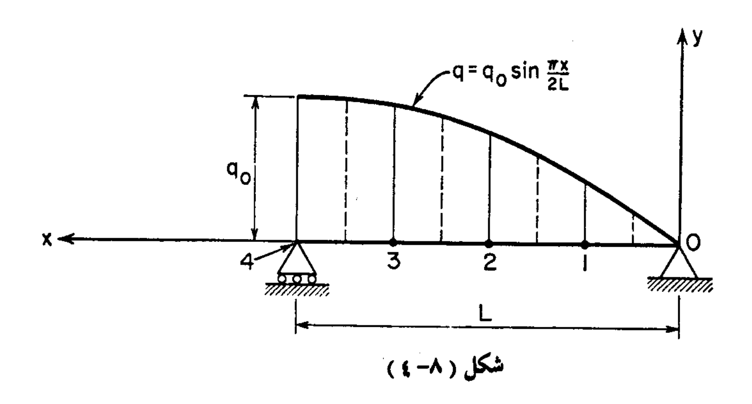
| $x$ | 1/3 | 2/3 | 1 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 81 | 162 | 243 |

الاجوبة

(a) $y_1 = 1.1539$; $y_2 = 3.9231$; $y_3 = 7.4615$.
(b) $y_1 = 0.6154$; $y_2 = 1.6923$; $y_3 = 2.8462$.

4.13 (أ) جد قيمة الانحراف عند نقاط الارتكاز للدعامة المرسومة في شكل 4.8 . مستعملا اربعة فترات فرعية ومكتلا lumping الحمل الموزع عند المرتكزات. استخدم تعابير الفرق المركزي ذات الخطأ من المرتبة $h^2$ .

(ب) جد عزوم الثني bending moments عند المرتكزات $(M = -EIy'')$




شكل (٨-٤)

4.14 (أ) جد قيمة الانحراف عند نقاط الارتكاز للعتبة المرسومة في شكل 4.9 . مستعملا اربعة فترات فرعية وتكتيل الحمل الموزع عند نقاط الأرتكاز . استخدم تعابير الفرق المركزي ذات الخطأ من المرتبة $h^2$ .

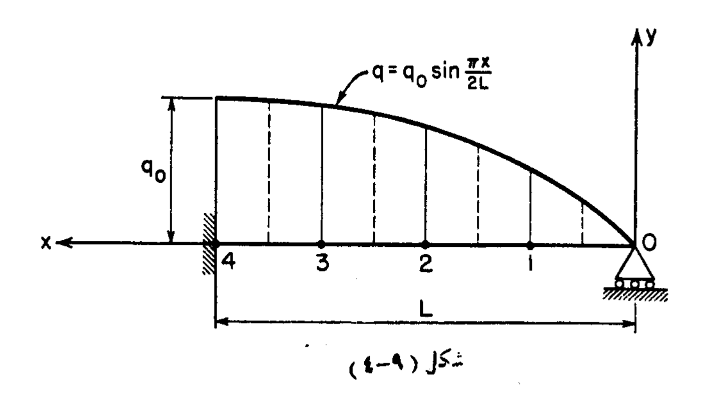
(ب) جد عزم الثني عند النهاية المبنية $(M = -EIy'')$

الاجوبة

$y_3 = -0.000857qL^4EI$; $y_2 = -0.001025qL^4/EI$;
$y_1 = -0.00142qL^4/EI$; $M_4 = -0.01828qL^2$.

4.15 (أ) جد قيمة الانحراف عند نقاط الارتكاز للعتبة المرسومة في شكل 4.10 مستعملا أربعة فترات فرعية ومكتلا الحمل الموزع عند نقاط الارتكاز . استخدم التعابير التفاضلية المركزية ذات الخطأ من المرتبة $h^2$

(ب) جد عزوم الثني عند نقاط الارتكاز $(M = -EIy'')$




شكل (٩-٤)

4.16 احسب قيمة الانحراف في نقاط الارتكاز لعتبة منتظمة الحمل بسيطة الارتكاز التي عزم قصورها الذاتي يتغير خطيا من $I_0$ عند طرفها الايسر وحتى $5I_0$ عند طرفها الأيمن . استعمل تعابير الفرق المركزي ذات الخطأ من مرتبة $h^2$ والتي عدد فتراتها الفرعية أربع .

الجواب

$y_1 = 0.003621qL^4/EI_0;\ y_2 = 0.004883qL^4/EI_0;\ y_3 = 0.003377qL^4/EI_0.$

4.17 (أ) احسب انحرافات نقاط الأرتكاز لعتبة ترتكز على أساس مرن ( انظر البند 4.6 ) ومنتظمة الحمل بسيطة الأرتكاز عند طرفيها حيث أن $k = 16$ . استعمل قوانين الفرق المركزية ذات الخطأ من المرتبة $h^2$ وان $n = 2, 4$ استوف extrapolate قيمة الانحراف عند المركز .

(ب) جد قيمة عزم الثني عند مقطع منتصف البون mid-span section مستخدما اثنين واربع فترات فرعية ثم استوف $(M = -EIy'')$

4.18 عتبة ترتكز ارتكازا بسيطا وكل من عزم قصورها الذاتي $I$ . وطولها $L$ ثابتان تتحدل بفعل حملين ضاغطين طوليين متساويين $P$ . استخرج أصغر قيمة حرجة الى $P$ مستعملا الاستيفاء عندما يكون عدد الفترات الفرعية 2, 3, 4

تلميح : – ان مسألة القيم المميزة تعرف بموجب المعادلات التالية : –

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0; \qquad y(0) = y(L) = 0.*$$

الجواب

$$K = \frac{PL^2}{EI}; K_2 = 8; K_3 = 9; K_4 = 9.3726; K_{2,3} = 9.8; K_{3,4} = 9.85164;$$
$$K_{2,3,4} = 9.86881.$$

4.19 عتبة رفيعة طولها $L$ ترتكز ارتكازا بسيطا . عزم قصورها الذاتي يتعين كما يأتي

$$I(x) = I_0(1 + 2x/L); \qquad 0 \le x \le L/2;$$
$$I(x) = I_0(3 - 2x/L); \qquad L/2 \le x \le L.$$

تتحدل بفعل حملين ضاغطين طوليين $P$ عين أصغر قيمة حرجة الى $P$ مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء من نمط $h^2$- $(h^2,h^4)$ ( راجع المسألة 4.18)

4.20 عتبة حديدية cantilever beam ذات مقطع عرض مستطيل ضيق مبنية عند $x = 0$ قد حملت بحمل مستعرض $P$ عند $x = L$ المطلوب تعيين أصغر قيمة حرجة الى $P$ تجعل العتبة تتحدل جانبيا مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء . $(h^2,h^4)$

تلميح : – ان الدوران $\beta$ يحقق مسألة القيم المميزة التالية : –

$$\beta'' + \frac{P^2L^2}{BC}(1 - x/L)^2\beta = 0; \qquad \beta(0) = 0; \qquad \beta'(L) = 0.$$

الجواب

$$P_2 = 4\sqrt{BC/L^4}; P_3 = 3.933\sqrt{BC/L^4}; P_4 = 3.959\sqrt{BC/L^4},$$
$$P_{2,3,4} = 4.030\sqrt{BC/L^4}; P = 4.013\sqrt{BC/L^4}.$$

( انظر صحيفة 245 من نظرية الاستقرار المرن تأليف تيموشنكو ) .

4.21 عتبة ذات مقطع عرضي ضيق مستطيل ترتكز ببساطة عند $x = \pm L/2$ بينما يمنع دوران نهايتها حول محور العتبة . العتبة تتحدل جانبيا بفعل حمل شاقولي عند $x = 0$ . المطلوب تعيين أصغر قيمة حرجة الى $P$ بدلالة $B$ . اصغر جسوءة

انثنائية للعتبة في مستواها الرئيسي $C$ ، جسوءة الالتواء ، $L$ ، طول العتبة .
استعمل $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية واستيفاء $P_{2,4}$
تلميح : — دوران $\beta$ يحقق مسألة القيم المميزة التالية : —

$$\beta'' + \frac{P^2L^2}{4BC}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right)^2 \beta = 0; \qquad \beta\left(\frac{L}{2}\right) = \beta\left(-\frac{L}{2}\right) = 0.\dagger$$

4.22 صفيحة دائرية نصف قطرها $R$ وجسوءتها الانثنائية $D$ ثبتت من حافتها ، تتحدل بتأثيركبس منتظم قدره $N$ لكل وحدة طول . المطلوب تعيين أصغر قيمة حرجة $N$ مستعملا $n = 2, 3$ كعدد للفترات الفرعية والاستيفاء ، مع العلم أن ميل الصفيحة $\phi$ يحقق مسألة القيم المميزة التالية : —

$$\phi'' + \frac{1}{r}\phi' + \left(\frac{N}{D} - \frac{1}{r^2}\right)\phi = 0; \qquad \phi(0) = \phi(R) = 0.*$$

الجواب
$N_2 = 12.00D/R^2$; $N_3 = 13.50D/R^2$; $N_{2,3} = 14.70D/R^2$;
$N = 14.68D/R^2$.

4.23 المناويل modes وترددات عتبة قص shear beam يتغير ثابت نابضها خطيا تحكم بمسألة القيم المميزة التالية :

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dx}{dz} + \frac{K^2}{z}x = 0; \qquad x(1) = 0, \qquad \left.\frac{dx}{dz}\right]_{0.5} = 0,$$

علما بأن $K^2 = \omega^2L^2m_0/\alpha^2k_0$ وان $k_0, m_0$ وحدة الكتلة ووحدة ثابت النابض يساويان $k\Big]_{z=0}$ و $m\Big]_{z=0}$ وان $L$ هو طول العتبة $\alpha$ تدل على الميل المتمم لخط ثابت النابض
احسب قيم $\omega^2$ الثلاثة التي هي أصغر مايمكن مستعملا فترات فرعية عددها $n = 1, 2, 3, 4$ والاستيفاء .
( المناويل جمع منوال وهي الكمية التي تتكرر بأكبر نسبة ص ٩٧٣ معجم الوسيط / مجمع اللغة العربية ) .

4.24 عمود رفيع طوله $L$ وعزم قصوره الذاتي $I$ ووزن وحدة الطول منه $q$ بني عند $x = 0$ حر عند $x = L$ يتحدل بفعل وزنه الذاتي . احسب القيمة الحرجة الى $q$ مستعملا فترات فرعية عددها 1, 2 والاستيفاء . ان انحراف العمود $y$ يتغير بمسألة القيم المميزة التالية : —

4.25 احسب اصغر تردد طبيعي للتذبذبات الحرة لعتبة طولها $L$ ترتكز ببساطة مستعملا الاستيفاء وعدد من الفترات الفرعية هو 4, 3, 2

تلميح : — ان المعادلة التفاضلية لحركة العتبة هي

$$y^{iv} + \frac{qL}{EI}\left(1 - \frac{x}{L}\right) y'' - \frac{qL}{EI}\frac{1}{L} y' = 0;$$

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0.$$

افرض $k_n = q_n L^3/EI$

الجواب $k_1 = 4.0000;\ k_2 = 6.7624;\ k_{1,2} = 7.6832;\ k = 7.83.$

( انظر مسائل الاهتزاز في الهندسة تأليف تيموشنكوص ٣٣٢ . الناشر فان نوسترافد )

علما بأن الجسوءة الانثنائية = $EI$ والكثافة $\rho$ ومساحة مقطع العتبة $A$ عوض $y(x,t) = X(x)\sin \omega t$

في هذه المعادلة ثم عبر عن ان العتبة بسيطة الاسناد عند نهايتها .

$$X(0) = X(L) = 0; \qquad X''(0) = X''(L) = 0.$$

Let $w = \omega L^2/\sqrt{EI/\rho A}$. افرض

*Ans.* $w_2 = 8;\ w_3 = 9;\ w_4 = 9.3726;\ w_{2,3} = 9.8;\ w_{3,4} = 9.8516;$
$w_{2,3,4} = 9.8688.$

الجواب

4.26 احسب اصغر تردد طبيعي للتذبذبات الحرة لعتبة طولها $L$ مثبتة عند $x = 0$ وحرة عند $x = L$ مستعملا فترات فرعية $n = 2$

تلميح : — راجع المسألة 4.25

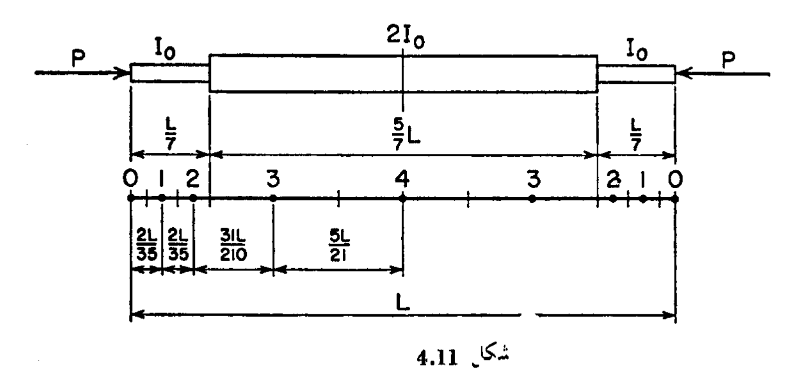
4.27 عين قيم $y$ عند نقاط الارتكاز في الفترة $(0,1)$ اذا علمت ان $y$ تحقق مسألة القيم الحدودية $y'' + 2y = f(x)$ و $y(0) = y(1) = 0$ وان $f(x)$ تتعين بالجدول التالي :—

| $x$ | 0 | 0.15 | 0.40 | 0.75 | 1.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 16 | 30 | 20 | 0 |

استعمل تقريبات $y''$ اللامتماثلة ذات الخطأ من المرتبة $h$.

الجواب $y_1 = -1.8021;\ y_2 = -3.8260;\ y_3 = -2.7060.$

4.28 احسب حمل التحدل $P$ للعتبة التي ترتكز ببساطة الخاصة بالشكل 4.11 مستعملاً الفروق غير المتساوية من المرتبة $h$ وبحسب التقسيمات المؤشرة ( راجع المسألة 4.18 )



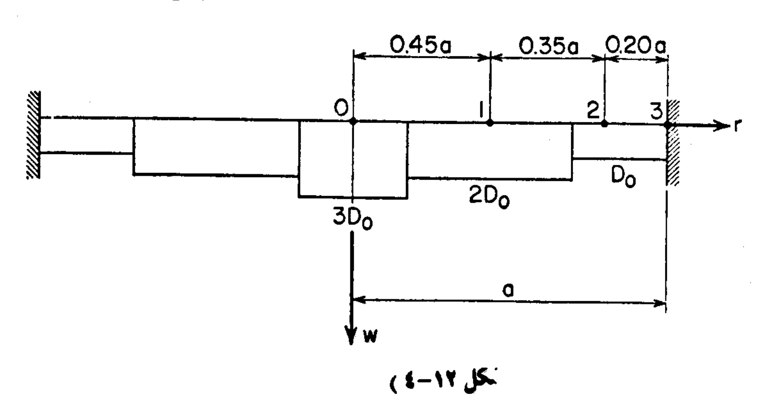

شكل 4.11

4.29 صفيحة دائرية مدّرجة كما في الشكل 4.12 مثبته على طول حافتها تنحرف بتأثير حمل منتظم قدره $q$ .

(أ) عين ميلها $\phi(r)$ بموجب تقريبات $\phi''$ اللامتماثلة والتي اخطاؤها من المرتبة $h$. ( انظر المسألة 4.8 ).

(ب) عين انحراف المركز بالتكامل العددي

الجواب $\phi(0.45a) = 0.0163qa^3/D_0;\ \phi(0.8a) = 0.0177qa^3/D_0;$
$w_0 = 0.0114qa^4/D_0.$




شكل ١٢-٤ )

4.30 حل المسألة 4.29 في الحالة التي يكون ارتكاز الصفيحة بسيطاً ( انظر المسألة 4.9 ).

# الفصل الخامس

# الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية

# The Numerical Solution of Partial Differential Equations

## 5.1 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية

***Classification of Partial Differential Equations of the Second Order***

لقد وجدت عمليات التكاملات العددية اوسع تطبيق لها في حلول المعادلات التفاضلية الجزئية . غير ان التكامل العددي للمعادلات الفروقية الجزئية الناتجة عنها تقود الى مسائل اساسية في التمام واستقرار الحل . حيث تواجه اختلافات اساسية في طبيعة الحلول الجوهرية تبعا لنوع المعادلة التفاضلية التي يراد حلها .

وحيث ان المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية هي ذات اهمية خاصة في كل من حقول انتشار الامواج . توصيل الحرارة . المرونة . الاهتزازات . نظرية الطبقة الحدودية ، الخ فان الفصل الحالي سيعالج . الى قدر كبير . هذا النوع من المعادلات مع ان مسائل عدة تشمل معادلات من مرتبة اعلى ستوخذ بنظر الاعتبار .

دع معادلة تفاضلية جزئيةمن المرتبة الثانية بدالة $u$ مؤلفة من متغيرين مستقلين $x, y$ تأخذ الصيغة :

$$A(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (5.1.1)$$

ان هذه المعادلة خطية في حدود المرتبة الثانية غير ان الحد

$$f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

قد يكون خطيا اوغيرخطي . ففي الحالة الاولى تسمى المعادلة (5.1.1) خطية وفي الحالة التالية تسمى شبه خطية *quasi-linear*

وتصنف المعادلة (5.1.1) على انها ناقصة *elliptic* ، مكافئية *parabolic* او زائدية *hyperbolic* في نقاط منطقة ما $R$ . تبعا لكون

معادلة اهليلجية او ناقصية $B^2 - 4AC < 0$

$$B^2 - 4AC = 0 \qquad \text{معادلة مكافئية} \qquad (5.1.2)$$

$$B^2 - 4AC > 0^* \qquad \text{معادلة زائدية}$$

وحيث ان المعاملات $C, B, A,$ هي . بصورة عامة . دوال لمتغيرات مستقلة فان تصنيف المعادلة (5.1.1) قد يختلف في المناطق regions المختلفة من مجال domain تعريف المسألة .

## [a] المعادلات الاهليليجية ( المعادلات الناقصية )

### ELLIPTIC EQUATIONS

ان المعادلة التفاضلية هي ناقصة في منطقة ما . اذا كان $B^2 - 4AC < 0$ في جميع نقاط المنطقة . ان الشروط الحدودية لهذا النوع من المعادلة قد تحدد قيمة الدالة لها . او مشتقها العمودي . او من مزيج combination خطي من الدالة ومشتقها العمودي في كل نقطة من الحدود المغلقة closed boundary للمنطقة $R$ التي ينبغي ايجاد قيمة الحل $u(x,y)$ داخلها ( الشكل 5.1a ) . ان الشروط الحدودية المعطاة في كل نقطة من الحدود المغلقة تعرف بصورة فريدة حل مسألة القيم الحدودية ( المحددة بالمعادلة التفاضلية الجزئية وبالشروط الحدودية المرافقة لها ) داخل المجال .

ان الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية بالفروق المحدودة يقود . بصورة عامة . الى منظومة من المعادلات الجبرية الخطية الانية بقيم الدالة في مرتكزات ( نقاط ارتكاز ) منطقة تعريف المسألة . ويمكن حل منظومة المعادلات هذه بالاساليب الموضحة في الفصل الاول .

معادلة لابلاس :

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (5.1.3)$$

ومعادلة بواسان

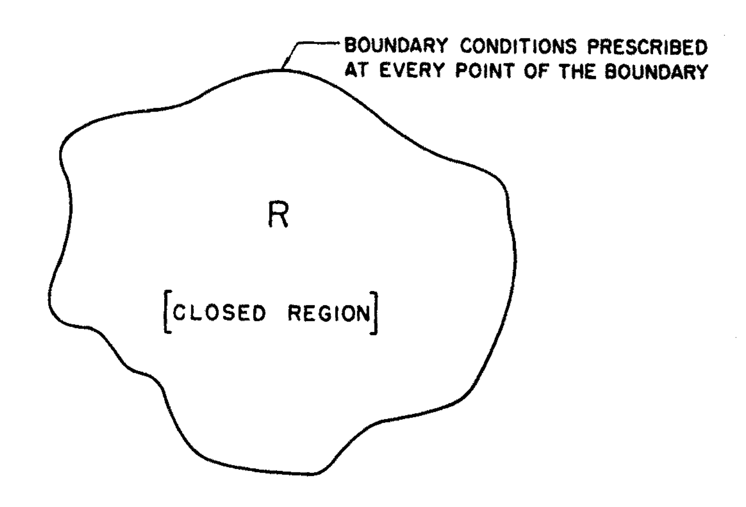
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad (5.1.4)$$

---

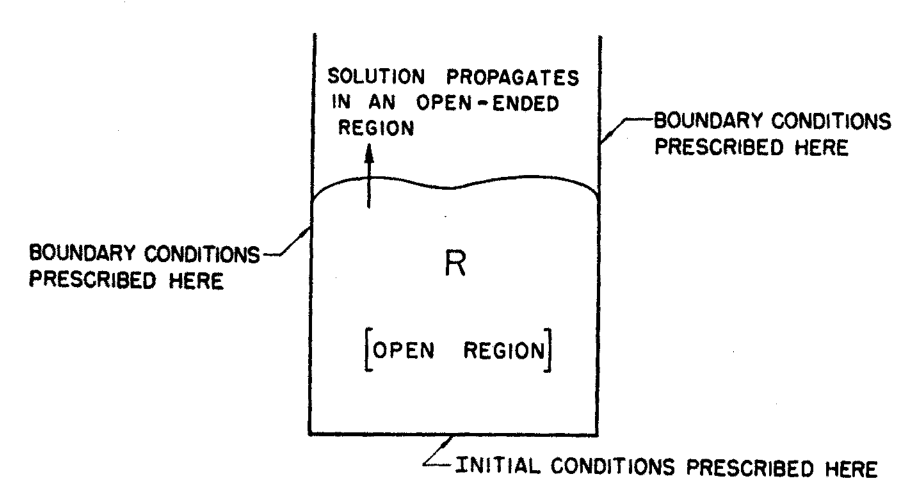
ان اهمية هذا الصنف وثيقة الارتباط بنظرية المميزات تصنف المعادلة التفاضلية الجزئية بدلالة مميزاتها اي المحلات الهندسية (ملتقى النقاط) للانقطاعات المتملة في مشتقات حل ما (انظر . مثلا بقطع المرجع من الكتاب الاصلي).

تسمى المعادلة زائدية في نقطة ما اذا ماوجد اتجاهان حقيقيان متميزان . وتسمى مكافئة اذا ماوجد اتجاه واحد حقيقي متميز متميز وناقصية او اهليلجية اذا ماخلت من اي اتجاه حقيقي متميز في تلك النقطة.

هما مثالان مهمان لهذا الصنف من المعادلات وسيناقش حلهما العددي بالفروق المحدودة في الاقسام




(a) ELLIPTIC PROBLEM




(b) PARABOLIC OR HYPERBOLIC PROBLEM

شكل ١ــ٥

## [b] المعادلات المكافئة

PARABOLIC EQUATIONS

تكون المعادلة التفاضلية مكافئة في منطقة $R$ اذا كان $B^2 - 4AC = 0$ في كل نقاط المنطقة ان القيمة الابتدائية للدالة $u$ في زمن ما . $t_0$ . وان قيمة الدالة او مشتقتها او مزيج خطي مكون من الدالة ومشتقها العمودية على الحدود هي الشروط الحدودية المطلوبة.

في مسائل من هذا النوع لايعرف الحل ضمن مجال مغلق وانما ينتشر في مجال مفتوح منطلقا من الشروط المفروضة على حدود مفتوحة ( الشكل 5.16 ان معادلة انتقال الحرارة لاحادية البعد هي من المعادلات المكافئة المهمة . وسيوضح حل هذا النوع من المسائل في القسم 5.1b

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.1.5}$$

## [c] المعادلات الزائدية

HYPERBOLIC EQUATIONS

تعبر المعادلة التفاضلية زائدية في منطقة $R$ اذا كان $B^2 - 4AC > 0$ في جميع نقاط المنطقة . ان القيم الابتدائية للدالة $u$ ومشتقتها الاول بالنسبة للزمن بالاضافة الى قيمة الدالة او مشتقتها العمودية او مزيج خطي مكون من الدالة ومشتقها العمودية على حدود منطقة التعريف هي الشروط الحدودية المطلوبة .

ان احدى المعادلات المهمة من هذا الصنف هي معادلة الامواج احادية البعد وسيناقش الحل

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{5.1.6}$$

العددي لمسائل من هذا النوع بالفروق المحددة في القسم 5.18

## 5.2 مؤثرات الفروق الجزئية في الأحداثيات الديكارتية

***Partial Difference Operators in Cartesian Coordinates***

ان تحويل معادلة تفاضلية جزئية الى معادلة الفروق الجزئية المناظرة يتم . اساسا . بنفس الطرق والمفكوكات المطوّرة في الفصول السابقة للمعادلات التفاضلية الاعتيادية .

حيث ان المشتقات الجزئية تقيم بنفس العملية النهائية limiting process المستعملة في المشتقات الاعتيادية مع الاحتفاظ بجميع المتغيرات . عدا واحدا ثابتة وهكذا فباستعمال $D_x, D_y, \ldots$ للدلالة على المشتقات الجزئية لدالة $z = f(x,y,\ldots)$ بالنسبة الى $x, y, \ldots$ على التوالي يمكن الحصول على مفكوكات الفروق المركزية لـ $D_x, D_y, \ldots$ من المعادلة (2.7.16) مباشرة .

فمثلا اذا رمزت $h$ للفاصلة spacing الثابتة بين نقاط الارتكاز على احداثي $x$ ورمزت $\delta_x^n z_i$ لفرق $z$ المركزي ذي الرتبة $n$ عند $i$ في اتجاه $x$

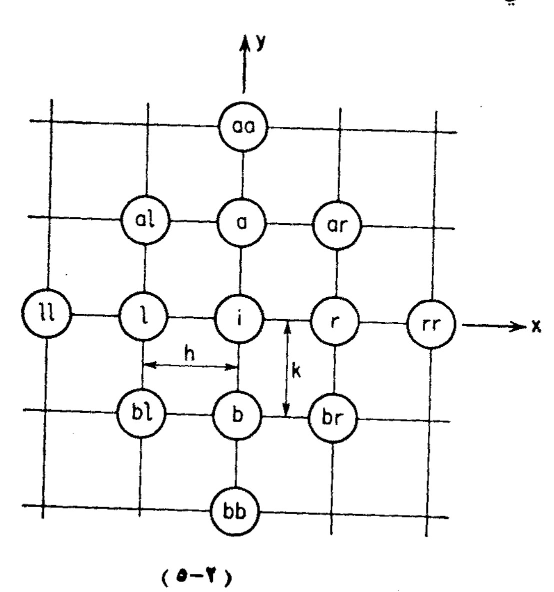
$$2hD_xz_i = z_r - z_l + 2\epsilon_{1x} \qquad \left[\epsilon_{1x} = \mu\left(-\frac{\delta_x^3}{6} + \frac{\delta_x^5}{30} - \ldots\right)z_i\right], \quad (5.2.1)$$

$$h^2D_x^2z_i = z_r - 2z_i + z_l + \epsilon_{2x} \qquad \left[\epsilon_{2x} = \left(-\frac{\delta_x^4}{12} + \frac{\delta_x^6}{90} - \ldots\right)z_i\right], \quad (5.2.2)$$

$$2h^3D_x^3z_i = z_{rr} - 2z_r + 2z_l - z_{ll} + 2\epsilon_{3x}$$
$$\left[\epsilon_{3x} = \mu\left(-\frac{\delta_x^5}{4} + \frac{7\delta_x^7}{120} - \ldots\right)z_i\right], \quad (5.2.3)$$

$$h^4D_x^4z_i = z_{rr} - 4z_r + 6z_i - 4z_l + z_{ll} + \epsilon_{4x}$$
$$\left[\epsilon_{4x} = \left(-\frac{\delta_x^6}{6} + \frac{7\delta_x^8}{240} - \ldots\right)z_i\right]. \quad (5.2.4)$$

وبالمثل اذا رمزت $k$ للفاصلات الثابتة لنقاط الارتكاز على احداثي $z$ و $\delta_y^n z_i$ لفرق $z$ النوني عند $i$ باتجاه $y$ واذا سميت نقاط الارتكاز المجاورة للنقطة $z_i$ عموديا




( ٥-٢ )

$z_{aa}, z_a, z_b,$ كما في الشكل 5.2 ، تكون المشتقات الجزئية بالنسبة الى $y$

$$2kD_yz_i = z_a - z_b + 2\epsilon_{1y} \qquad \left[\epsilon_{1y} = \mu\left(-\frac{\delta_y^3}{6} + \frac{\delta_y^5}{30} - \ldots\right)z_i\right], \quad (5.2.5)$$

$$k^2D_y^2z_i = z_a - 2z_i + z_b + \epsilon_{2y} \qquad \left[\epsilon_{2y} = \left(-\frac{\delta_y^4}{12} + \frac{\delta_y^6}{90} - \ldots\right)z_i\right], \quad (5.2.6)$$

$$2k^3D_y^3z_i = z_{aa} - 2z_a + 2z_b - z_{bb} + 2\epsilon_{3y}$$
$$\left[\epsilon_{3y} = \mu\left(-\frac{\delta_y^5}{4} + \frac{7\delta_y^7}{120} - \ldots\right)z_i\right], \quad (5.2.7)$$

$$k^4D_y^4z_i = z_{aa} - 4z_a + 6z_i - 4z_b + z_{bb} + \epsilon_{4y}$$
$$\left[\epsilon_{4y} = \left(-\frac{\delta_y^6}{6} + \frac{7\delta_y^8}{240} - \ldots\right)z_i\right]. \quad (5.2.8)$$

وتقتنى عبارة expression مشتقة $z$ الثاني المختلط بالنسبة الى $D_{xy}, y, x$ باستعمال المؤثر الذي يعطي $D_x$ على المؤثر الذي يعطي $D_y$ أي بحاصل ضربهما $D_xD_y$ او

$$D_{xy}z_i = \frac{1}{2k}\left[\frac{1}{2h}(z_r - z_l)_a - \frac{1}{2h}(z_r - z_l)_b\right] + \frac{1}{2hk}\epsilon_{1,xy},$$

$$4hkD_{xy}z_i = z_{ar} - z_{al} - z_{br} + z_{bl} + 2\epsilon_{1,xy}$$
$$[-\tfrac{1}{6}(\mu\delta_x\mu\delta_y^3 + \mu\delta_y\mu\delta_x^3) + \ldots]z_i. \quad (5.2.9)$$

بالمثل فان المشتقة الرابعة المختلطة $\partial^4z/\partial x^2\partial y^2 \equiv D_{xxyy}$ هي حاصل ضرب التاثيري $D_y^2, D_x^2$ .

$$h^2k^2D_{xxyy}z_i = (z_r - 2z_i + z_l)_a - 2(z_r - 2z_i + z_l)_i + (z_r - 2z_i + z_l)_b + \epsilon_{2,xy}$$
$$= (z_{ar} + z_{al} + z_{br} + z_{bl}) - 2(z_a + z_b + z_r + z_l) + 4z_i + \epsilon_{2,xy} \qquad [\epsilon_{2,xy} = (-\tfrac{1}{12}(\delta_x^2\delta_y^4 + \delta_y^2\delta_x^4) + \ldots)z_i]. \quad (5.2.10)$$

المؤثر اللابلاسي ( او التوافقي ) *Laplacian (or harmonic) operator* $\nabla^{2}$*

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = D_x^2 + D_y^2$$

---

(*) ينبغي عدم خلط المؤثر $\nabla^2$ بالفرق الخلفي ( التراجعي ) الثاني

يصبح بالمعادلات(5.2.2) و(5.2.6)ولمشبك مستطيل ذي فتحات ابعادها و $k$ , $h$

$$h^2k^2\nabla^2 z_i = k^2(z_r - 2z_i + z_l) + h^2(z_a - 2z_i + z_b) + k^2\epsilon_{2x} + h^2\epsilon_{2y} \quad (5.2.11)$$

وللحالة الخاصة حيث يتساوى ابعاد نقاط الارتكاز في الاتجاهين $k$ و $y$ اي لمشبك مربع التفحة .

$$h^2\nabla^2 z_i = z_a + z_b + z_r + z_l - 4z_i + \epsilon_{2x} + \epsilon_{2y}, \qquad (5.2.12)$$

حيث $\epsilon_{2x}$ و $\epsilon_{2y}$ معطيان بالمعادلتين (5.2.2) و (5.2.6)على التوالي . اما المؤثر

$$\nabla^4 \equiv \nabla^2(\nabla^2) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \dagger$$

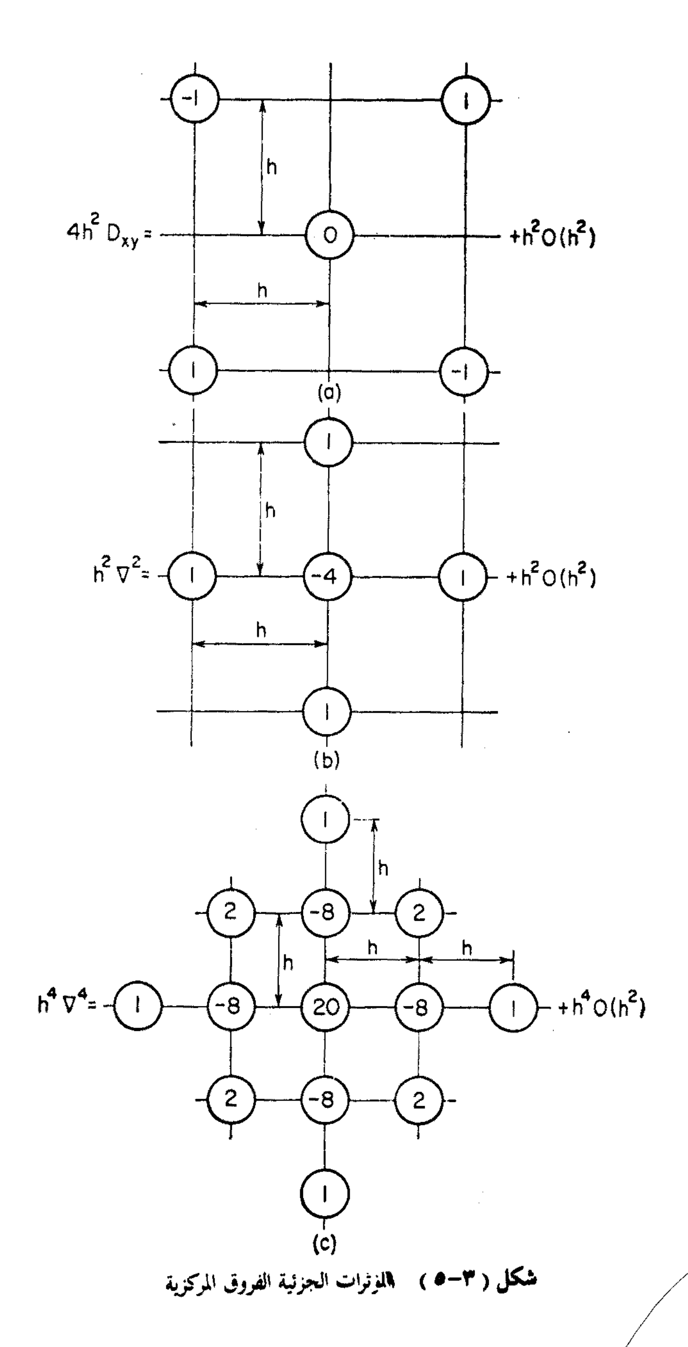
فيصبح لمشبك مربع :

$$\begin{aligned} h^4\nabla^4 z_i = h^4\nabla^2(\nabla^2 z_i) &= h^2[\nabla^2 z_a + \nabla^2 z_b + \nabla^2 z_r + \nabla^2 z_l - 4\nabla^2 z_i] \\ &= (z_{aa} + z_{bb} + z_{rr} + z_{ll}) + 2(z_{al} + z_{ar} + z_{br} + z_{bl}) \\ &\quad - 8(z_a + z_b + z_r + z_l) + 20z_i + \epsilon, \quad (5.2.13) \end{aligned}$$

نحصل على $\epsilon$ بواسطة $\epsilon_{4x}$, $\epsilon_{4y}$, $\epsilon_{4,xy}$.

وتمثل المؤثرات الجزئية $D_{xy}$ و $\nabla^2$ و $\nabla^4$ لمشبك مربع بكل يسر جزيئات الاشكال 5.3a و 5.3b ، 5.3c على التوالي

(**) ينبغي عدم خلط المؤثر $\nabla^4$ بالفرق الخلفي ( التراجعي ) الرابع

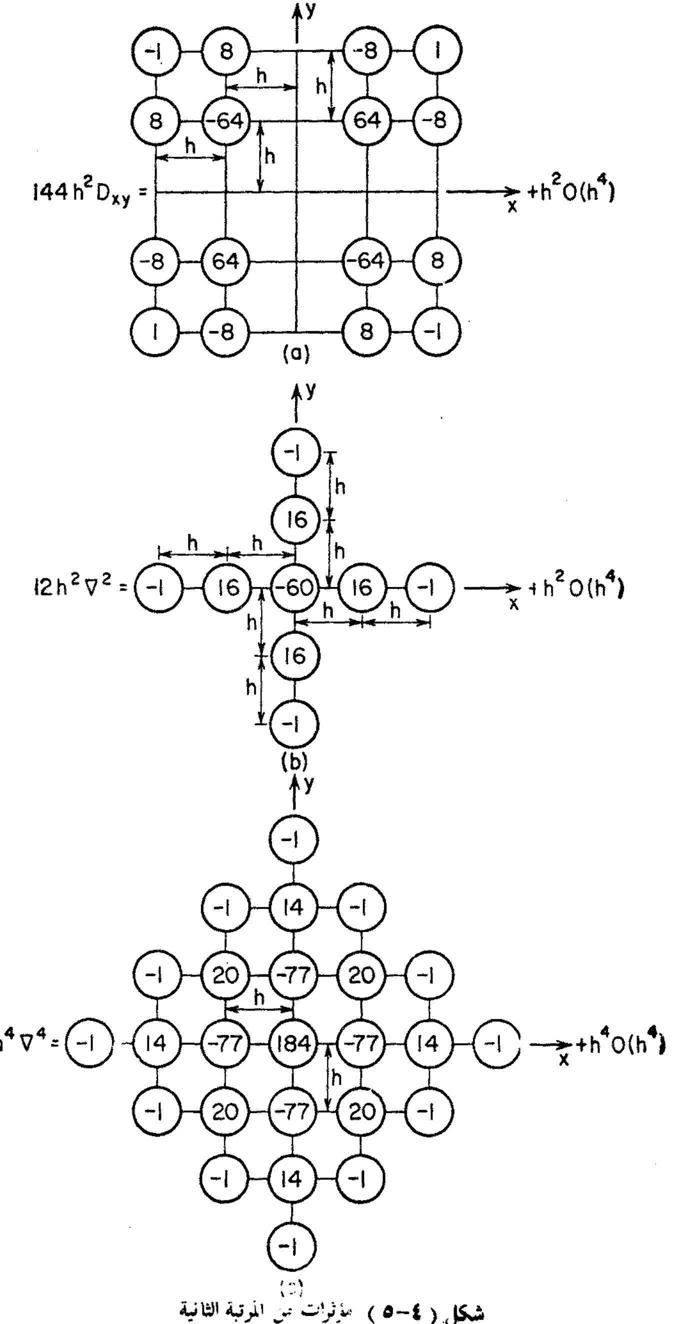



شكل ( ٣-٥ ) المؤثرات الجزئية الفروق المركزية

وبواسطة مؤثرات الفروق المركزية في الشكل 2.8b . نحصل بالمثل على مؤثرات الجزيئات في الشكل 5.4 بخطأ من مرتبة $h^4$ والتي يمكن استعمالها للحصول على حلول ادق .

وتقتني المؤثرات الجانبية Lateral اعتماداً على الفروق الامامية او الخلفية ( التراجعية ) بالطريقة نفسها .

نقتني المؤثرات الثلاثية البعد باسلوب مماثل تماماً وقد تم استعمالها في مسائل المرونةوانتقال الحرارة




شكل ( ٤-٥ ) مؤثرات من المرتبة الثانية

## 5.3 التكامل المزدوج العددي Numerical Double Integration
### قانون شبه المنحرف

يمكن تعميم التكامل المزدوج (5.3.1)

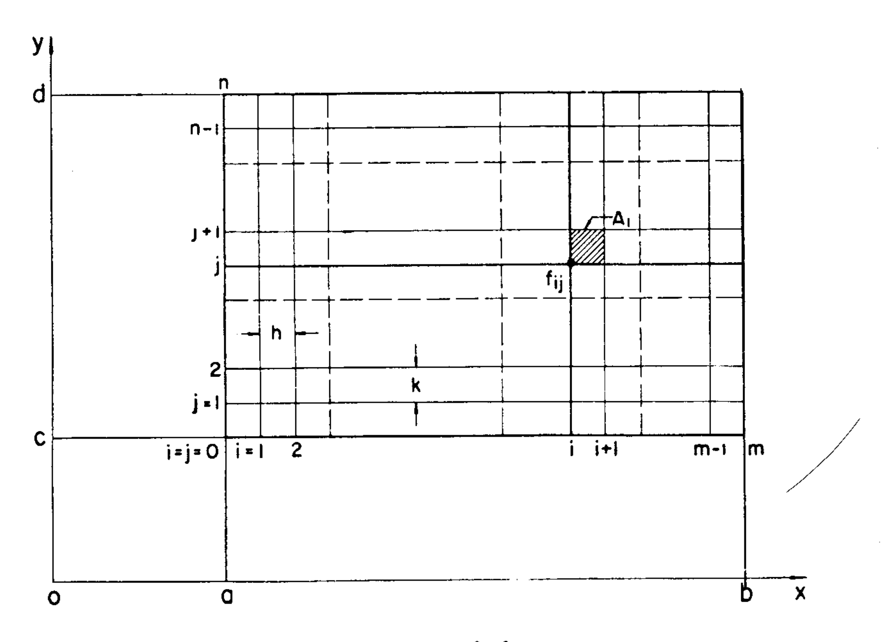
$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dx\, dy$$

المنبسط على مستطيل $x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d,$ عددياً بتكاملين متتاليين باتجاه $x$ ثم باتجاه $y$ وباستعمال قانون شبه المنحرف الوارد في القسم 2.8a

لهذا الغرض قسّم المربع $(a,b),\ (c,d)$ الى عدد $m \cdot n$ من المربعات ذات ابعاد $h = (b-a)/m,\ k = (d-c)/n,$ ثم خذ بنظر الاعتبار القيم $f_{ij}$ للدالة $f$ في نقاط الارتكاز ( الشكل 5.5 ).

$$x_i = a + ih \qquad (i = 0,1,2,\ldots,m);$$
$$y_j = c + jk \qquad (j = 0,1,2,\ldots,n).$$

ان القيمة $A_1$ للتكامل الممتد على مستطيل واحد ذي اطراف $h,k$ زاويته السفلى اليسرى عند

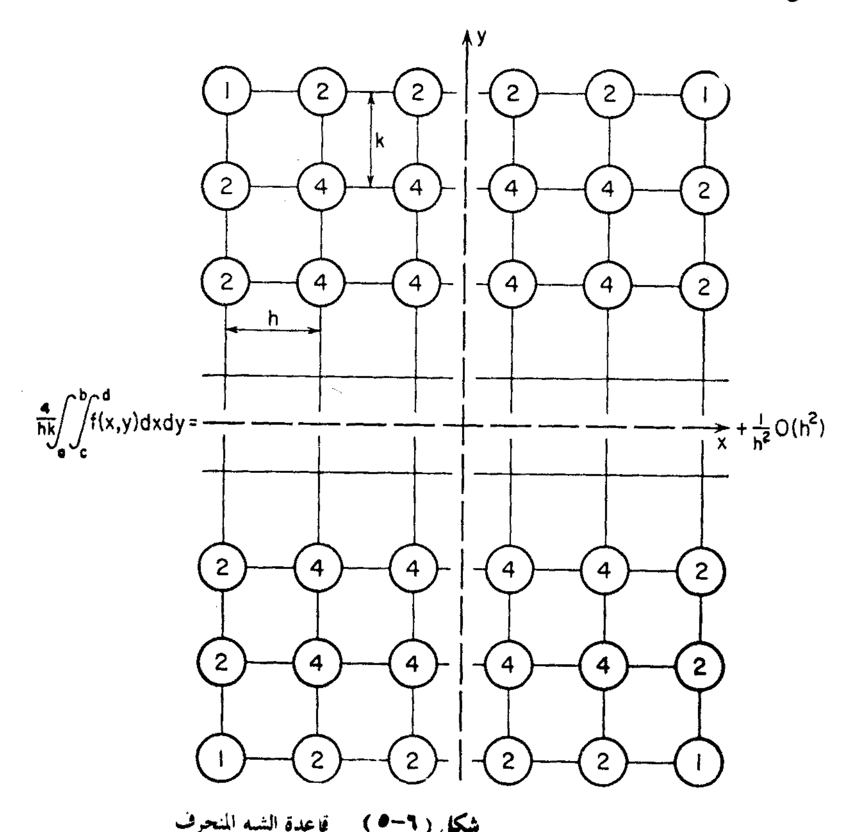



( ٥-٥ )

$$A_1 = \int_{y_i}^{y_{i+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx \doteq \int_{y_i}^{y_{i+1}} \left\{\frac{h}{2}[f_i(y) + f_{i+1}(y)]\right\} dy$$
$$\doteq \frac{h}{2}\left[\frac{k}{2}(f_{i,j} + f_{i,j+1}) + \frac{k}{2}(f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1})\right]$$
$$= \frac{hk}{4}[f_{ij} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}]. \quad (5.3.2)$$

باضافة قيم $A_1$ المناظرة لكل مستطيل في المجال وملاحظة ان كل قيمة ارتكاز داخلية تعد اربع مرات وكل قيمة ارتكاز حدودية تعد مرتين فيما عدا قيم الزوايا . حيث تعد مرة واحدة فقط . يمكننا تمثيل قيمة $V$ بالمؤثر . او الجزيئة في الشكل 5.6 .

ولتقييم الخطأ في مؤثر التكامل المزدوج بقانون شبه المنحرف . ينبغي ان نتذكر بان الخطأ لتكامل منفرد بقانون شبه المنحرف هو مرتبة $h^2$ [ المعادلة (2.11.11) ]




شكل ( ٦-٥ ) قاعدة الشبه المنحرف

لذلك فان مساحة كل مقطع من الحجم $V$ الحاصل بواسطة مستو مواز للمستوى $z$ عند $y = y_j$ فيها خطأ من مرتبة $h^2$.

$$A(y_j) = \int_a^b f(x,y_j)\,dx = A_j + K_j h^2. \qquad \text{(a)}$$

وبواسطة المعادلة (a) وقانون شبه المنحرف المطبق باتجاه $y$ يصبح التكامل المزدوج

$$V = k(\tfrac{1}{2}A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1} + \tfrac{1}{2}A_n) + k(\tfrac{1}{2}K_0 + K_1 + \ldots + K_{n-1} + \tfrac{1}{2}K_n)h^2 + K'k^2,$$

حيث يمثل الحد الاخير الخطأ الناشيء عن المكاملة باتجاه احداثي $y$ وبتعويض $(d - c)/n$ بدلاً عن $k$ في الحد الثاني من المعادلة وجعل

$$\bar{K} = \frac{(d - c)}{n}\left(\frac{1}{2}K_0 + K_1 + K_2 + \ldots + K_{n-1} + \frac{1}{2}K_n\right),$$

نرى ان الخطأ في التكامل المزدوج هو على نمط

$$\epsilon_t = \bar{K}h^2 + K'k^2$$

او عند اطلاق $\alpha$ على النسبة $k/h$

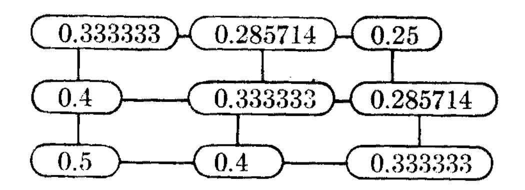
$$\epsilon_t = (\bar{K} + \alpha^2 K')h^2. \qquad (5.3.3)$$

تظهر المعادلة (5.3.3) ان الخطأ في قانون شبه المنحرف للتكامل المزدوج هو من مرتبة $h^2$ ولذلك فان معادلات استيفاء $h^2$ ( ذات خطأ من مرتبة $h^2$ ) قد تستخدم لتحسين نتائج التكامل العددية .

سيطبق قانون شبه المنحرف لايجاد قيمة المتكاملة .

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{dx\,dy}{x + y} \\ &= \int_1^2 \Big[\ln\,(x + y)\Big]_1^2 dx = \int_1^2 [\ln\,(x + 2) - \ln\,(x + 1)]\,dx \\ &= \Big[(x + 2)[\ln\,(x + 2) - 1] - (x + 1)[\ln\,(x + 1) - 1]\Big]_1^2 \\ &= \ln \tfrac{1024}{729} = \ln 1.4046639 = 0.339798. \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

باستعمال $n = 2$ و $h = k = 0.5$ تكون قيم الدالة $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ عند نقاط الارتكاز في حقل مجال المتكاملة




وبذلك تكون قيمة $V$ التقريبية كما هي معطاة في مؤثر الشكل 5.6 وباستعمال اربع ارقام ذات دلالة معنوية .

$$V_{t,2} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{4} \{(0.3333 + 0.5 + 0.3333 + 0.25) + 2(0.4 + 0.4 + 0.2857 + 0.2857) + 4(0.3333)\} = 0.3433$$

حيث مقدار الخطأ في هذه القيمة $-1.0$ بالمائة وعند استعمال $h = k = 0.25, n = 4$ نحصل بنفس الطريقة على

$$V_{t,4} = 0.3406,$$

بخطأ مقداره $-0.24$ بالمائة . وعند استعمال استيفاء $h^2$ بالمعاملات $\alpha_1 = 0.3333$ و $\alpha_2 = 1.3333$ من الجدول 2.12 والمناظرة للنسبة $n_2/n_1 = 2$ نحصل على القيمة

$$V_t\Big]_{2,4} = 1.3333 \cdot 0.3406 - 0.3333 \cdot 0.3433 = 0.3397,$$

بخطأ مقداره $+0.03$ بالمائة .

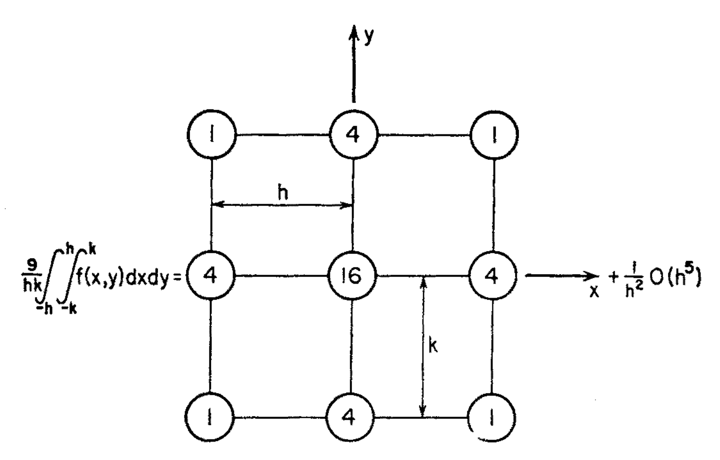
### [b] قانون سمبسون الثلثي

باستعمالين متتاليين لقانون سمبسون الثلثي ( المعادلة 2.11.4 ) باتجاهي $x$ و $y$ تصبح قيمة التكامل الثنائي $V$ الممتد الى اربع مستطيلات اطرافها $h$ و $k$ ملتقية عند $x_i, y_j$

$$B_4 = \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} dy \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x,y)\, dx \doteq \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \frac{h}{3} [f_{i-1}(y) + 4f_i(y) + f_{i+1}(y)]\, dy$$

$$\doteq \frac{hk}{9} [f_{i-1,j-1} + f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j+1} + 4(f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j} + f_{i+1,j}) + 16 f_{ij}]. \quad (5.3.4)$$

ان المؤثر $B_4$ يظهر في جزيئة الشكل ( ٧-٥ )




5.7. قاعدة سمبسون للمربعات

باضافة قيم $B_4$ المناظرة لكل مستطيل في المجال نحصل على المؤثر او الجزيئة في الشكل 5.8 وبعملية مشابهة لتلك المستعملة في الجزء 4 من هذا القسم . يكون من السهل اثبات كون الخطأ في قانون سمبسون الثلثي للتكامل الثنائي من مرتبة $h^4$ ولذلك فان استيفاءات $h^4$ ( البند 3 ، 2 ) قد تستعمل مع قانون سمبسون ثنائي البعد .

ان استعمال قانون سمبسون الثلثي على التكامل (b) من هذا القسم تعطي إلى $n = 2$

$$V_{s,2} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{9}[0.5 + 0.333333 + 0.25 + 0.333333$$
$$+ 4(0.4 + 0.4 + 0.285714 + 0.285714) + 16 \cdot 0.333333] = 0.339881,$$

بخطأ مقداره ‎-0.0024‎ بالمائة .

ان اياً من قواعد التكامل البسيط الواردة في القسم2.10و 2.11 قد تستعمل بطريقة مماثلة لاشتقاقه قوانين تكاملات ثنائية .

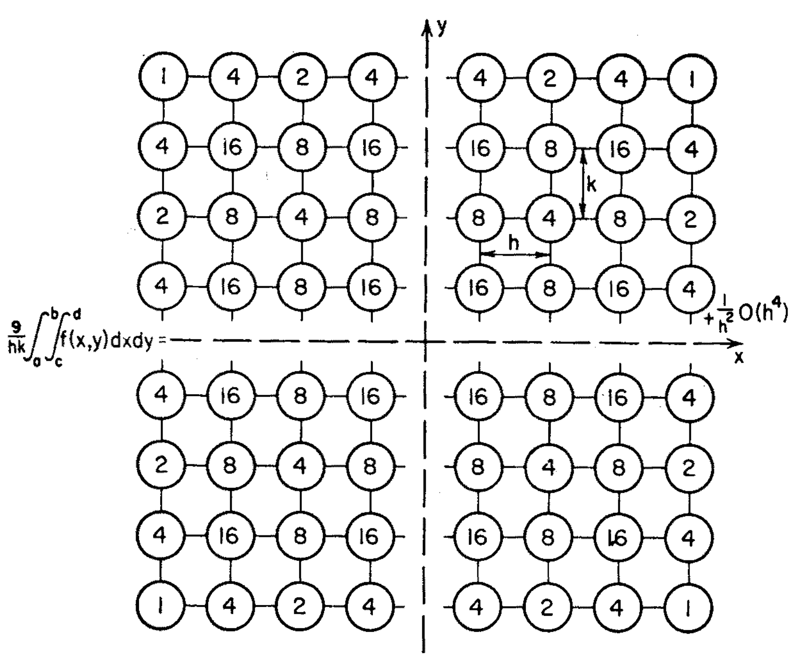



**Fig. 5.8.** Simpson's $\frac{1}{3}$ rule.

شكل 58 قاعدة سمبسون

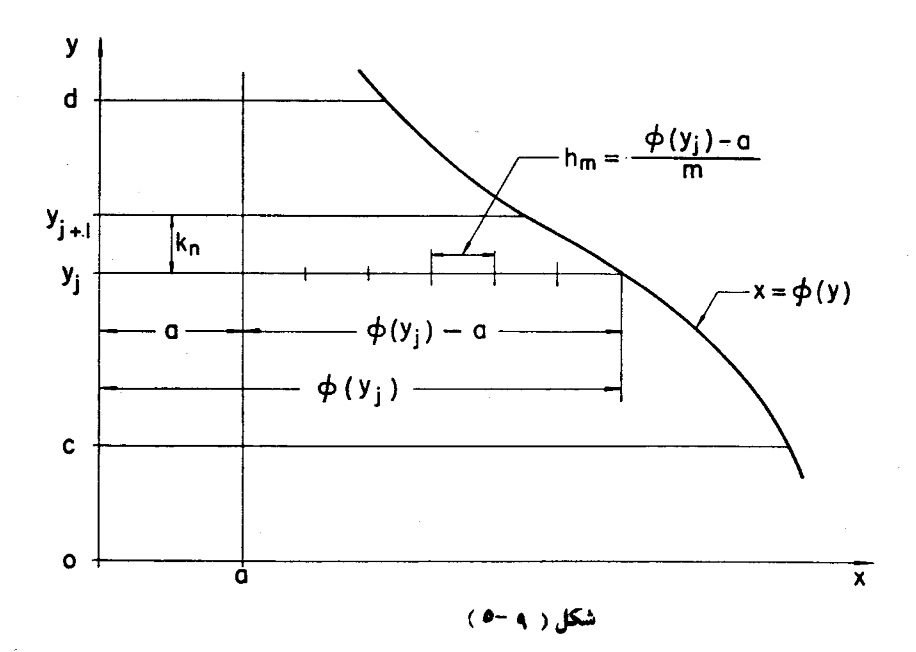
## [c] تكاملات ذات حدود عليا متغيرة

ان تقييم التكامل (5.3.5)

$$V = \int_c^d dy \int_a^{\phi(y)} f(x,y)\,dx, \tag{5.3.5}$$

والتي تمثل $\phi(y)$ فيها دالة ذات قيمة واحد single-valued في $y$ . قد يقتني باداء التكامل الاول بين $a$ و $x_j = \phi(y_j)$ بموجب قانون الشبه المنحرف ولعدد $m$ من الفترات ( الشكل 5.9 :

$$A_j = \int_a^{\phi(y_j)} f(x,y_j)\,dx$$
$$\doteq h_m[\tfrac{1}{2}f_0(y_j) + f_1(y_j) + f_2(y_j) + \dots + f_{m-1}(y_j) + \tfrac{1}{2}f_m(y_j)], \tag{5.3.6}$$




شكل ( ٩ -٥ )

ثم بمكاملة $A_j$ ثانية بموجب قانون الشبه المنحرف ولفترات عددها $n$

$$V = \int_c^d A_j \, dy$$
$$\doteq k_n[\tfrac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + \tfrac{1}{2}A_n]. \qquad (5.3.7)$$

يتم اختيار الفاصلة spacing المنظمة . في المعادلة (5.3.6) بحيث تكون

أي : $mh_m = x_j - a = \phi(y_j) - a$

$$h_m = \frac{\phi(y_j) - a}{m}, \qquad (5.3.8)$$

بينما في المعادلة (5.3.7)

$$k_n = \frac{d - c}{n}. \qquad (5.3.9)$$

فمثلاً اذا اعطينا

$$V = \int_0^4 dy \int_0^{y^2} (x + y)\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^4 (x + y)^2 \Big]_0^{y^2} dy$$
$$= \tfrac{1}{2} \int_0^4 (y^4 + 2y^3)\, dy = 166.4,$$

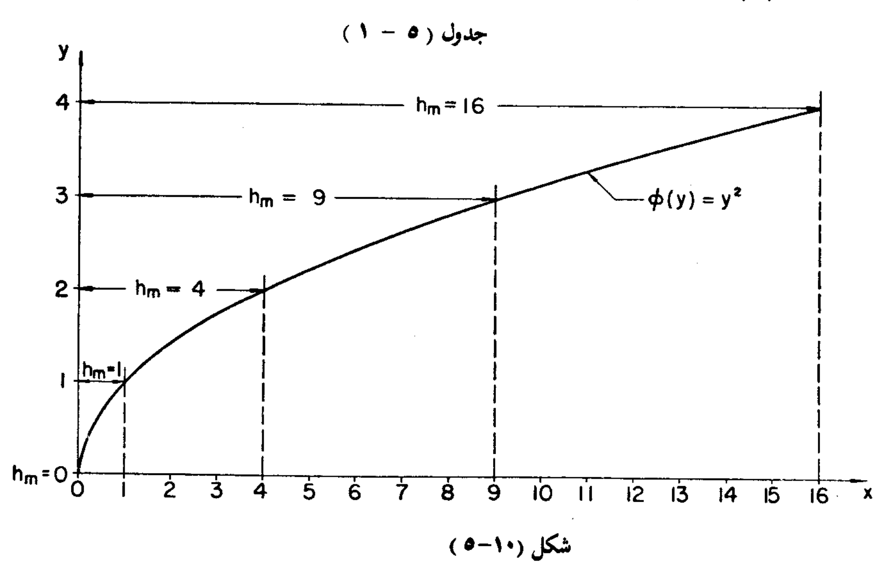
وباستعمال $n = 4$ لذا $k_n = 1$ وباستعمال $m = 1$ ولذا $h_m$ كما مبين في الجدول 5.1 ، نحصل على $V = 181.0$ بخطأ مقداره $-8.77$ بالمائة ( الشكل 5.10 )وباستعمال $k_n = 0.5$ $V = 170.75$ بخطأ مقداره $-2.61$ بالمائة .

**Table 5.1**

| $y_i \backslash x_i$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | $h_m$ | $2A_j$ | $m_j$ | $2m_jA_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $f(x,y) = x_i + y_i$ | | | | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | 1/2 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | | | | 1 | 1(1 + 2) | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 6 | | | 4 | 4(2 + 6) | 1 | 32 |
| 3 | 3 | 4 | 7 | 12 | | 9 | 9(3 + 12) | 1 | 135 |
| 4 | 4 | 5 | 8 | 13 | 20 | 16 | 16(4 + 20) | 1/2 | 192 |

$V = \Sigma\, m_jA_j = 181; \qquad \Sigma\, 2m_jA_j = 362.$

جدول ( ٥ - ١ )




شكل (١٠-٥)

كلما كان تقسيم الفترات $a - \phi(y_j)$ و $d - c$ الى عدد زوجي من الشرائح ميسوراً فان التكامل قد ينجزبقانون سمبسون الثلثي . عندما يكون حدا التكامل الاعلى والادنى ، في اتجاه، دالة في $y$

$$V = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\, dx, \qquad (5.3.10)$$

فان شيئاً من العملية لا يتغير سوى ايـجاد قيمة $h_m$ الذي يصبح

$$h_m = \frac{\phi_2(y_j) - \phi_1(y_j)}{m} \qquad (5.3.11)$$

جدول ( ٢ -٥ )

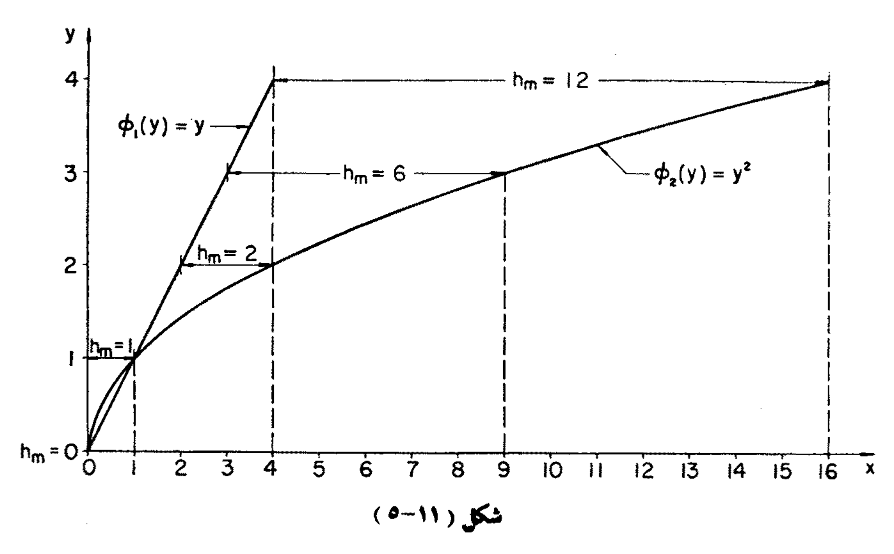
| $j$ | $h_m$ | $2A_j$ | $m_j$ | $2m_jA_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 2(4 + 6) | 1 | 20 |
| 3 | 6 | 6(6 + 12) | 1 | 108 |
| 4 | 12 | 12(8 + 20) | 1/2 | 168 |

$V = 148\ (e = -11\%)$; $\quad \Sigma\, 2m_jA_j = 296.$

ويوضح الجدول 5.2 والشكل 5.11 ايجاد قيمة التكامل التالي :

$$V = \int_0^4 dy \int_y^{y^2} (x + y)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (y^4 + 2y^3 - 3y^2)\, dy = 134.4$$

باستعمال $k_n = 1$ ، $m = 1.$




شكل ( ١١-٥ )

## 5.4 حل معادلة لابلاس بالمعاودة *Iteration*

ان مجموعة كبيرة من المسائل الفيزيائية الثنائية البعد تحكم بما يسمى معادلة لابلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

بالشروط الحدودية المناسبة . ومن هذه مسألة الحرارة المطردة ( steady-state ) وفي الحقيقة . فإنه يمكن البرهنة* على أن درجة الحرارة $u(x,y)$ في جسم ثنائي البعد ( صفيحة رقيقة معزولة ، أو اسطوانة مالانهائية الطول ) تفي بالمعادلة ( 5.4.1 ) اينما كانت $u$ مستقلة عن الزمن .

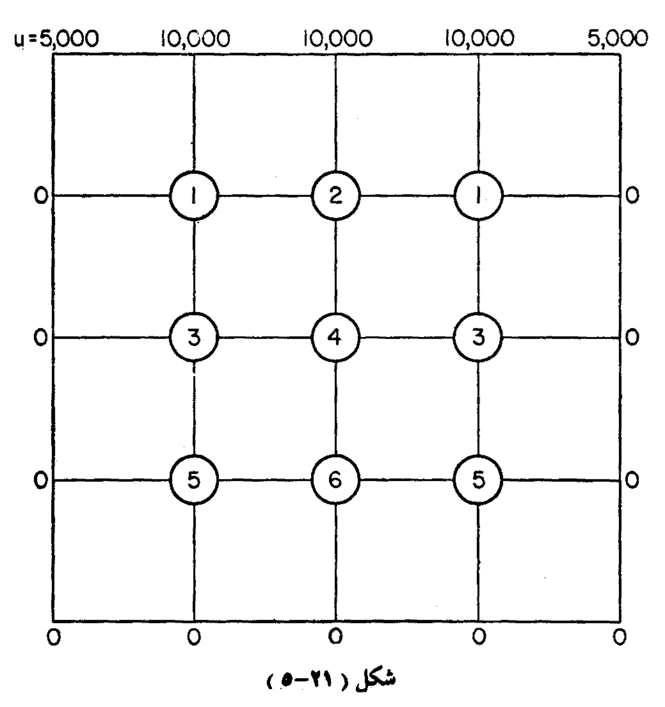
وكمثال على حل معادلة لابلاس بالطرق العددية ، خذ مسألة ايجاد درجات حرارة الحالة المطردة $u$ في نقاط الأرتكاز في مشبك مربع ذي فتحة ( عين ) $h$ في صفيحة مربعة ، وقيمة أضلاعها $L$ ، معزولة تماماً . بالتعويض عن $\nabla^2 u$ في المعادلة ( 5.4.1 ) بمؤثر الشكل ( 5.3 b ) وباستعمال رموز الشكل 5.2 بالاشارة الى نقاط الأرتكاز ، تصبح المعادلة ( 5.4.1 ) معادلة لابلاس الفروقية :*Laplacian difference equation.*

$$u_a + u_b + u_r + u_l - 4u_i = 0. \qquad (5.4.2)$$

وبجعل $h = \frac{L}{4}$ ودرجات الحرارة على حدود الصفيحة كما هي معطاة في الشكل ( 5.12 وبترقيم نقاط الأرتكاز كما في الشكل تؤدي المعادلة ( 5.4.2 ) الى منظومة ست معادلات خطية :

---

(*) انظر المعادلات التفاضلية ص 243




شكل ( ٢١–٥ )

| Point | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −4 | 1 | 1 | | | | −10,000 |
| 2 | 2 | −4 | | 1 | | | −10,000 |
| 3 | 1 | | −4 | 1 | 1 | | 0 |
| 4 | | 1 | 2 | −4 | | 1 | 0 |
| 5 | | | 1 | | −4 | 1 | 0 |
| 6 | | | | 1 | 2 | −4 | 0 |

(a)

## منظومة المعادلات الخطية

وجذورها مقّيمة بطريقة كاوس Gauss' وهي

$$u_1 = 4286; \quad u_2 = 5268; \quad u_3 = 1875;$$
$$u_4 = 2500; \quad u_5 = 714; \quad u_6 = 982. \qquad \text{(b)}$$

ان معادلات لابلاس قد تم حلها بالمعاودة أيضاً ( البند 1.12 ) بحل المعادلة ( 5.4.2 ) لقيمة $u_i$:

$$u_i = \tfrac{1}{4}(u_a + u_b + u_r + u_l), \qquad (5.4.3)$$

ومنها يتبين أن درجة الحرارة عند $u$ تساوي متوسط درجات الحرارة في النقاط المجاورة الأربعة المتعامدة معها من المشبك . وانطلاقا من أية قيم متوقعة لدرجة الحرارة في نقاط الأرتكاز ثم التوسيط ( أخذ معدل ) المتوالي لدرجة الحرارة في كل أربعة نقاط متعامدة $u$ . يمكن الحصول على القيم المعاودة $u_i$ بكل سهولة . ولغرض الحصول على التمام سريع

**Table 5.3**

| $n$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4375 | 5312 | 1875 | 2500 | 625 | 938 |
| 1 | 4296 | 5273 | 1855 | 2480 | 698 | 969 |
| 2 | 4282 | 5261 | 1865 | 2490 | 708 | 976 |
| 3 | 4281 | 5263 | 1869 | 2494 | 711 | 979 |
| 4 | 4283 | 5265 | 1872 | 2497 | 712 | 980 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 9 | 4286 | 5268 | 1875 | 2500 | 714 | 982 |

جدول ( ٣-٥ )

لعملية المعاودة . والتي تعرف بطريقة ( *Liebmann* ) في هذه الحالة بالذات . يكون من الضروري الأنطلاق بقيم ابتداء جيدة . وتقتني القيم الجيدة عادة بواسطة مشبك حجم فتحاته اكبر . وهكذا باستعمال ( $h = L/2$ ) تصبح قيمة الأبتداء في مركز الصفيحة بالمعادلة (5.4.3)

$$u_4^{(0)} = \tfrac{1}{4}(10{,}000 + 0 + 0 + 0) = 2{,}500.$$

وبوجود قيمة في المركز يمكننا الآن اقتناء قيم النقاط 1 ، 5 بأخذ معدل النقاط الأربع المجاورة قطريا ووترياً لها . حيث أن اوتاد مشبك مربع هي الأخرى مشبك مربع . كما أن المؤثر $\nabla^2$ هو لامتغير ( invariant ) بالنسبة الى دوران المحاور الاحداثيات وهكذا ..

$$u_1^{(0)} = \tfrac{1}{4}(10{,}000 + 2{,}500 + 0 + 5{,}000) = 4{,}375;$$
$$u_5^{(0)} = \tfrac{1}{4}(0 + 2{,}500 + 0 + 0) = 625.$$

وتقتنى قيم الأبتداء في النقاط 2 ,3 ,6 بأخذ المعدل للنقاط المجاورة لها في المشبك الأصلي :

$$u_2^{(0)} = \tfrac{1}{4}(4{,}375 + 10{,}000 + 4{,}375 + 2{,}500) = 5{,}312;$$
$$u_3^{(0)} = \tfrac{1}{4}(0 + 4{,}375 + 2{,}500 + 625) = 1{,}875;$$
$$u_6^{(0)} = \tfrac{1}{4}(625 + 2{,}500 + 625 + 0) = 938.$$

ويبين الجدول 5.3 القيم المتوالية لدرجة الحرارة $u_i$ المقتناة بطريقة ليبمان والتي تطابق الى آخر رقم . الحل بطريقة كاوس .

## 5.5 حل معادلة لابلاس بالارخاء *Relaxation*

ان حل معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ والبالغة الأهمية في نظرية المجالات الكهرومغناطيسية التوصيل الحراري . المرونة .. الخ ) ميسور الأقتناء بالارخاء أيضاً البند 1.13

جدول ( ٤-٥ )

| ① | | ② | |
|---|---|---|---|
| 4375 | ~~−313~~ | 5312 | ~~2~~ |
| −80 | ~~7~~ | −40 | ~~−158~~ |
| −8 | ~~−33~~ | −4 | ~~2~~ |
| −1 | ~~−1~~ | 5268 | ~~−14~~ |
| 4286 | ~~−5~~ | | ~~2~~ |
| | −1 | | |

| ③ | | ④ | |
|---|---|---|---|
| 1875 | ~~0~~ | 2500 | ~~0~~ |
| | ~~−80~~ | | ~~−40~~ |
| | ~~−8~~ | | ~~−4~~ |
| | ~~−1~~ | | |

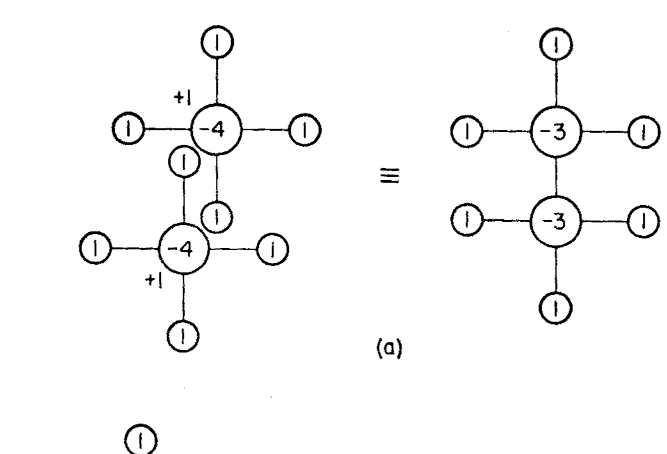
| ⑤ | | ⑥ | |
|---|---|---|---|
| 625 | ~~313~~ | 938 | ~~−2~~ |
| 80 | ~~−7~~ | 40 | ~~158~~ |
| 8 | ~~33~~ | 4 | ~~−2~~ |
| 1 | ~~1~~ | 982 | ~~14~~ |
| 714 | ~~5~~ | | ~~−2~~ |
| | 1 | | |

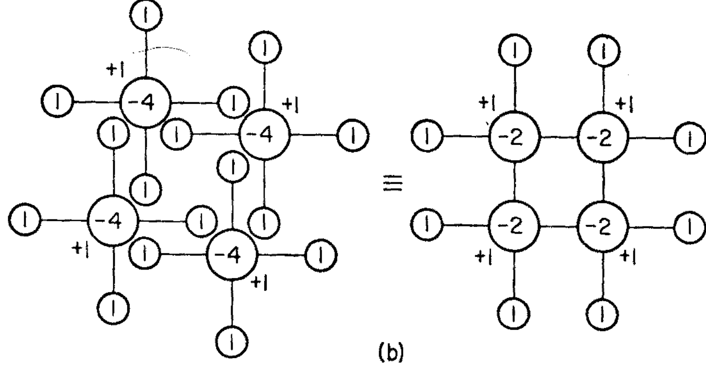
ان الباقي ( residual ) $R_i$ في المؤثر اللابلاسي الفروقي ( 5.4.2 ) بسبب قيم $u_i$ التقريبية

$$u_a + u_b + u_r + u_l - 4u_i = R_i,$$

يظهر أن تغيراً مقداره $\delta u_i$ في قيمة الأرتكاز $u_i$ سيقلل $R_i$ بمقدار $4\delta u_i$ بينما يزيد قيمه البواقي المجاورة الأربعة $R$ بمقدار $\delta u_i$ . وبهذا فان مؤثر $\nabla^2$ في الشكل 5.3b يمثل أيضاً تغير البواقي عند $i$ , $l$, $r$, $b$, $a$ الناتج عن تغير $u_i$ بمقدار وحدة واحدة . ويسمى نمط الأرخاء *relaxation pattern* تشمل عمليات الأرخاء اذن مضروبات ( multipliers ) تكاملية صحيحة ومتساوية في كل نقطة ارتكاز ويمكن اداؤها دون الأستعانة بآلة حاسبة .

يبين الجدول 5.4 ارخاء المعادلات (a) الستة من البند 5.4 وانطلاقاً من قيم ابتداء مأخوذة من السطر الأول من الجدول 5.3 .يختزل اكبر متبق بصورة نظامية الى صفر في كل خطوة . وحيث أن درجات الحرارة متناظرة حول المحور الوسطي للصفيحة . فإن ستة نقاط ارتكاز فقط استعملت في الأرخاء . كما ينبغي ملاحظة أنه نتيجة للتناظر ( شكل 5.12 ) فان تغيراً مقداره $\delta u$ عند النقاط 1 ,3 ,5 سيزيد المتبقيات عند 2 ,4 ,6 بمقدار $2\delta u$. في مسائل من هذا النوع يكون الأرخاء غالباً أسهل وأسرع طريقة للحل .




شكل **Figure 5.13**

يمكن بكفوء استعمال الارخاء الكتلي Block relaxation انظر البند 1.13 في حل معادلة لابلاس . ولغرض الحصول على نمط الارخاء الناتج من وحدة تغير في قيمتي نقطتي ارتكاز متجاورتين . يضاف نمطا الارخاء الناجمان عن كل تغير كما في الشكل 5.13a ويعطي الشكل 5.13b . بالمثل . نمط الارخاء لاربع وحدات تغير في اربع زوايا متجاورة في العين . ويظهر من هذه الاشكال ان انماط الارخاء الكتلي لها معاملات تساوي واحد في النقاط الخارجية للمجموعة . ومعاملات تساوي القيمة السالبة لعدد المستقيمات التي تصل النقطة الداخلية بالنقاط الخارجية في جميع النقاط الداخلية .

شكل (٤١-٥)

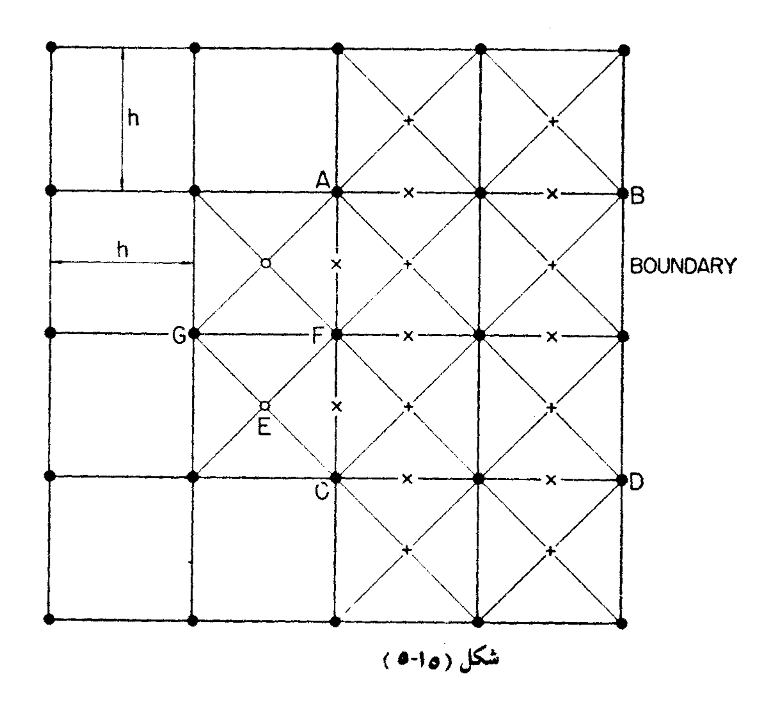
ويستحصل في الشكل 5.14 ارخاء معادلة لابلاس لدالة $u$ بالشروط الحدودية المعطاة انطلاقاً من قيم الابتداء $u_i$ صفرية . ان مجمل البواقي الابتدائية هو

$$40 + 50 + 90 + 110 = 290$$

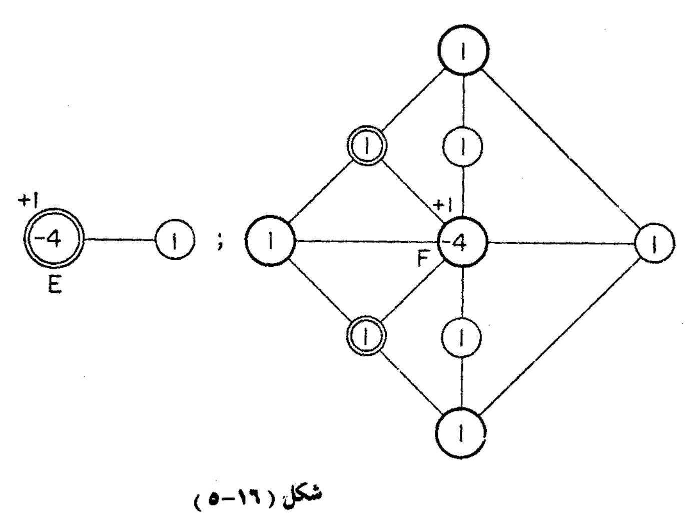
يكون مجموع معامل الارخاء من الشكل 5.13b هو $4\ (-2) = -8$ لذلك فان تغييرا كتليا ابتدائيا $(-290)/(-8) \doteq 36$ يدخل على النقاط الداخلية الاربع ثم يتم ارخاء اكبر باقي في كل خطوة لاحقة . ويقتني رقمان اضافيان بعد دورتين منفصلتين من تدقيق البواقي

وبعد انتهاء الارخاء على شبكة معينة . قد ينبغي تهذيب الحل في منطقة من المجال .

ويمكن انجاز هذا باستعمال شبكة ( فتحة مشبك ) بعدها يساوي $h/2$




شكل (٥-١٥)




شكل (١٦-٥)

في تلك المنطقة من المجال واقتناء قيم ابتدائية بالمؤثرات القطرية diagonal وهكذا لدى الحصول على قيم « الدوائر السوداء » في الشكل 5.15 . يمكن حساب قيم « الدوائر البيضاء » التكميلية والقيم المتصالبة بالمؤثرات القطرية . في حين تقيم نقاط × بالمؤثرات المتصالبة النظامية . ثم يقتني الحل على الشبكة المدرجة الجديدة بفاصلة $h$ في كل مكان مكان فاصلة $h/2$ في المنطقة $ABCD$ . وبهذا العمل يكون من الضروري فقط ان نلاحظ ان تغيرا $\delta u$ في نقاط مثل $F, E$ سيدخل تغييرا في بواقي كلتا الشبكتين . ولذلك فان نمط الارخاء في النقاط $F, E$ هوذلك المبين في الشكل 5.16 .

## 5.6 حل معادلة بواسان بالارخاء

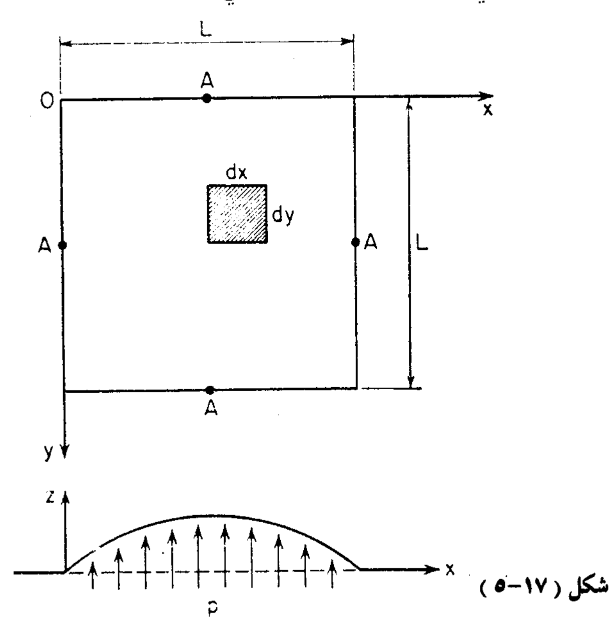
***Solution of Poisson's Equation by Relaxation***

ثمة معادلة أخرى أساسية في الفيزياء الرياضية هي معادلة بواسان

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y),$$

التي تتحكم في الظواهر في الكهرباء . المغناطيسية . المرونة . الخ .. وهي ميسورة الحل بالأرخاء وستطبق هنا على مسألة في المرونة .

خذ غشاء membrane قابل للانثناء تماما perfectly flexible ممتد بالتساوي على فتحة أفقية مربعة ضلعها $L$ . طفيف الانحراف deflection ( الى أعلى او اسفل ) تحت تأثير ضغط ثابت $p$ ( الشكل 5.17 ) اجعل $S$ يكون الشد tension الثابت لكل وحدة طول في الغشاء . $z$ هو الاحداثي فوق مستوى الفتحة الذي يؤخذ كمستوى $x, y$




شكل ( ١٧-٥ )

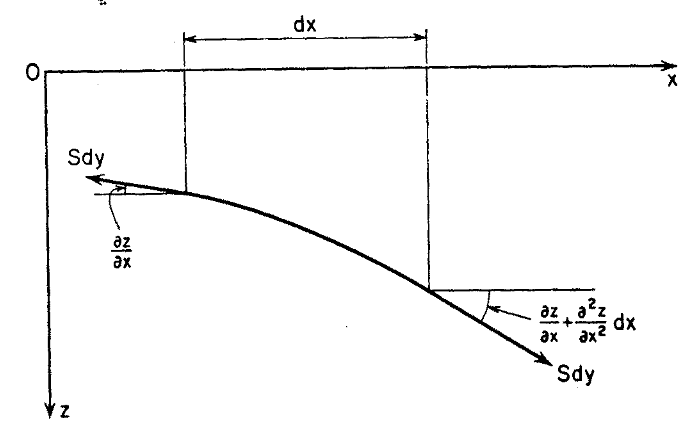
ان القوى المؤثرة على عنصر $dx\,dy$ من الغشاء هي (1) الضغط $p\,dx\,dy$ ,(2) محصلة الشد $S$ . العامل على الضلعين $dy$ ,(3) محصلة الشد العامل على الضلعين $dx$ ، ويعتبر وزن الغشاء تافها ( قابلا للاهمال ) . بافتراض انحدار الغشاء في كل مكان صغير جدا ( الشكل 5.18 ) فان محصلة الشد $S$ الشاقولية العاملة على الضلعين $dy$ من العنصر تساوي

$$-S\,dy\,\frac{\partial z}{\partial x} + S\,dy\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\right) = S\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx\,dy.$$

وبالمثل ، فان محصلة الشد على الضلعين $dx$ تساوي

$$-S\,dx\,\frac{\partial z}{\partial y} + S\,dx\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) = S\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dx\,dy.$$

وعليه فان المعادلة التفاضلية لتوازن equilibrium الغشاء في اتجاه $z$ تؤول . بعد




شكل ( ١٨-٥ )

القسمة على $S\,dx\,dy$ الى

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{p}{S} = 0, \qquad (5.6.1)$$

وهي معادلة بواسان وفيها $f(x,y) = -p/S$ ثابتا .ان الشروط الحدودية تتطلب كون

$z = 0$ على الحدود ( 5.6.2 )

للحصول على حل عددي لمسألة الغشاء بصيغة لابعدية non-dimensional اجعل :

$$x = \xi L; \qquad y = \eta L, \qquad z(x,y) = \frac{pL^2}{S}\,\phi(\xi,\eta) \qquad (5.6.3)$$

في المعادلتين (5.6.1) ، (5.6.2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{p}{S} = \frac{pL^2}{S}\left[\frac{\partial^2 \phi}{L^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{L^2 \partial \eta^2}\right] + \frac{p}{S} = 0;$$

على الحدود $\frac{pL^2}{S}\phi = 0$

وهكذا نجد ان الدالة $\phi$ هي حل مسألة القيم الحدودية

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + 1 = 0; \qquad (5.6.4)$$

$$\phi(0,\eta) = \phi(1,\eta) = \phi(\xi,0) = \phi(\xi,1) = 0.$$

لغرض تحويل أُولى المعادلتين (5.6.4) الى معادلة فروقية باستعمال مشبك مربع ذو فتحة $h = 1/n$ تُضرب حدود المعادلة بالكمية $h^2 = 1/n^2$ ، ثم تُعوض جزيئات الشكل 5.3b عن $h^2\nabla^2$ فان المعادلات الفروقية :

$$\phi_a + \phi_b + \phi_r + \phi_l - 4\phi_i + \frac{1}{n^2} = 0, \qquad (5.6.5)$$

مجتمعة مع الشروط الحدودية (5.6.4) ، هي المعادلات العددية لمسألة الغشاء. حالما يتم الحصول على قيم $\phi$ ، يمكن حساب انحرافات الغشاء بواسطة المعادلة (5.6.3).
انطلاقا من $n = 2$ ( الشكل 5.19a وحيث ان $\phi = 0$ على الحدود تعطي المعادلة (5.6.5)

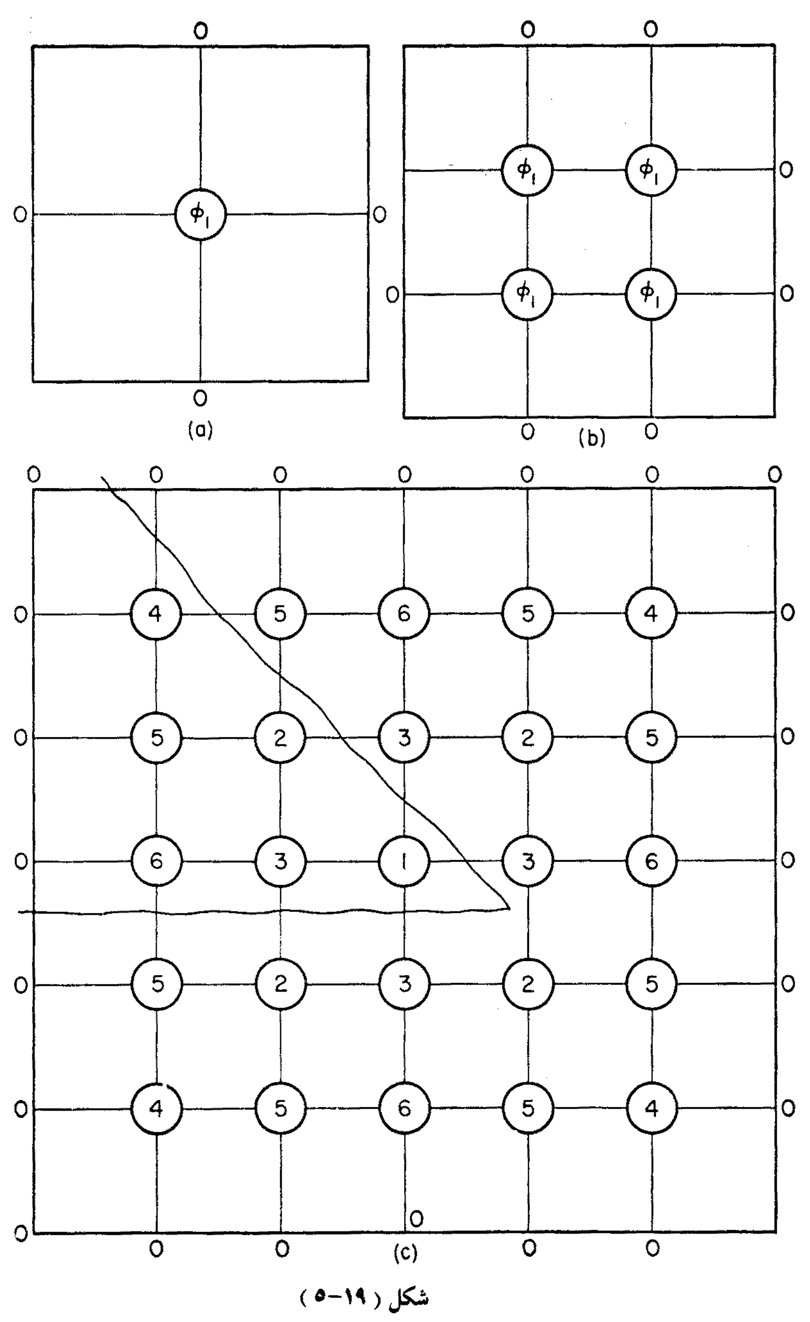
$$0 + 0 + 0 + 0 - 4\phi_1 + \tfrac{1}{4} = 0$$

او $\phi_1 = 0.0625$ ، $n = 3$ ( الشكل 5.19b ) تعطي المعادلة (5.6.5)

$$0 + 0 + \phi_1 + \phi_1 - 4\phi_1 + \tfrac{1}{9} = 0$$

او $\phi_1 = 0.0556$

وباستعمال $n = 6$ تعطي المعادلة (5.6.5) التي ضربت جميع حدودها بالمقدار $10^4$




شكل ( ١٩-٥ )

لتجنب الكسور العشرية .

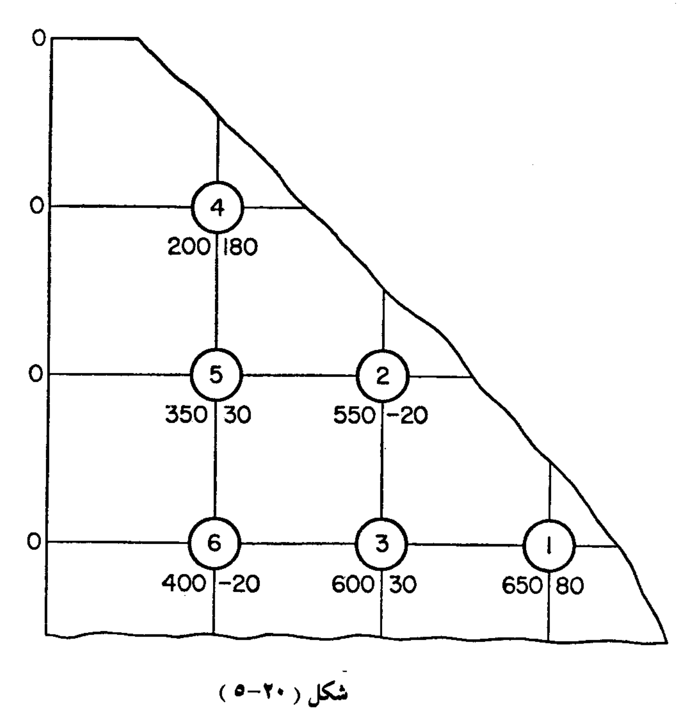
$$\phi_a + \phi_b + \phi_r + \phi_l - 4\phi_i + 278 = 0. \qquad (5.6.6)$$

ونتيجة للتناظر ، فان ثمن الغشاء لستة قيم $\phi$ فقط ينبغي اخذها بنظر الاعتبار كما هو موضح في الشكل 5.19c ونتيجة للتناظر ايضا فان المتغيرات $\delta R$ في البواقي بسبب تغير $\delta\phi = 1$ في قيمة $\phi$ لها القيم المبينة في الجدول 5.5

| $\delta\phi_i$ \ $\delta R_i$ | $i = 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i = 1$ | −4 | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | −4 | +2 | 0 | +1 | 0 |
| 3 | +4 | +2 | −4 | 0 | 0 | +1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | −4 | +1 | 0 |
| 5 | 0 | +2 | 0 | +2 | −4 | +2 |
| 6 | 0 | 0 | +1 | 0 | +1 | −4 |

جدول 5.5

وقد حُسِبتْ قيم $\phi$ الابتدائية بالاستكمال بصرياً من قيم $10^4\phi_1 = 625$ حيث $n = 2$ ومن $10^4\phi_1 = 556$ حيث $n = 3$ وتظهر هذه القيم في الشكل 5.20 سوية مع قيم البواقي المناظرة .




شكل ( ٢٠-٥ )

ان جدول الارخاء 5.6 يعطي . اولاً قيم $\phi$ لرقمين حسبت بالبواقي المدورة ( rounded-off يختصر أكبر باقي في كل خطوة بالأرخاء المفرط overrelaxation أساسا ) ثم يحسب رقمان آخران بارخاء المتبقيات نتيجة قيم $\phi$ ذات الرقمين ( ومرة أخرى يستعمل أساسا الأرخاء المفرط ) .

ونحسب انحرافات الغشاء الفعلية من قيم $\phi$ في الجدول 5.6 والمعادلة( 5.6.3 )

| ① | | ② | | ③ | | ④ | | ⑤ | | ⑥ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | ~~8~~ | 55 | ~~−2~~ | 60 | ~~3~~ | 20 | ~~18~~ | 35 | ~~3~~ | 40 | ~~−2~~ |
| 6 | ~~−16~~ | 3 | ~~4~~ | 3 | ~~5~~ | 5 | ~~−2~~ | 3 | ~~8~~ | 2 | ~~4~~ |
| | ~~−4~~ | | ~~10~~ | 1 | ~~11~~ | 1 | ~~4~~ | | ~~−4~~ | | ~~−4~~ |
| | 0 | | ~~−2~~ | | ~~−1~~ | | 0 | | ~~−2~~ | | ~~−1~~ |
| | | | 0 | | ~~5~~ | | | | ~~1~~ | | 0 |
| 71 | | | | | 1 | 26 | | | 2 | | |
| | | 58 | | | | | | | | 42 | |
| | | | | 64 | | | | 38 | | | |
| 710 | ~~−2~~ | 580 | ~~−2~~ | 640 | ~~8~~ | 260 | ~~−2~~ | 380 | ~~18~~ | 420 | ~~−2~~ |
| 10 | ~~38~~ | 8 | ~~14~~ | 10 | ~~24~~ | 4 | ~~14~~ | 8 | ~~−14~~ | 7 | ~~14~~ |
| 1.5 | ~~−2~~ | 2 | ~~−18~~ | 2 | ~~−16~~ | 0.5 | ~~−2~~ | 2 | ~~−16~~ | 0.5 | ~~24~~ |
| | ~~6~~ | 0.5 | ~~2~~ | | ~~−6~~ | | ~~2~~ | | ~~−2~~ | | ~~−4~~ |
| | 0 | | ~~6~~ | | ~~1~~ | | 0 | | ~~5~~ | | ~~0~~ |
| | | | ~~−2~~ | | ~~5~~ | | | | ~~−3~~ | | ~~2~~ |
| 721.5 | | | ~~2~~ | | ~~−3~~ | 264.5 | | | ~~−1~~ | | 0 |
| | | | 0 | | ~~−1.5~~ | | | | ~~−0.5~~ | | |
| | | | | | ~~−0.5~~ | | | | ~~0~~ | 427.5 | |
| | | 590.5 | | | 0 | | | | 0.5 | | |
| | | | | 652.0 | | | | 390.0 | | | |

جدول (٦-٥)

## 5.7 اللّـي المَـرِنْ

***Elastic Torsion***

لقد تم في نظرية المرونة* البرهنة على أن الاجهاد المماسي tangential stress قضيب موشوري ملوي ثابت المقطع . يؤخذ محوره كأحداثي $\tau_z$ . يمكن التعبير عند بدلالة مشتقات دالة لّي $\psi$ بالمعادلات .

* انظر مثلا ( تيموشنكو و ج.ن.كودير ) نظرية المرونة . شركة مكروهيل . نيويورك 1951 الصفحة 258 ومايليها .

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (5.7.1)$$

وتمثل $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ هنا مركبات $\tau_z$ في اتجاه $x, y$ على التوالي $G$ معامل القص . $\theta$ زاوية البرم لكل وحدة طول . إن الدالة $\psi$ تحقق بمعادلة بواسان .

$$\nabla^2\psi + 2 = 0 \qquad (5.7.2)$$

والشروط الحدودية

$$\psi = 0 \qquad (5.7.3)$$

اذا كان مقطع القضيب صلدا

ويعبر عن عزم اللّي torque $M_t$ . الذي يسبب الاجهادين في المعادلة (5.7.1) بدلالة $\psi$ بالمعادلة التالية :

$$M_t = 2G\theta \int\int \psi \, dx \, dy, \qquad (5.7.4)$$

حيث التكامل الثاني يمتد ليشمل على مقطع القضيب .

نود تعيين الاجهاد الاقصى . عددياً . في قضيب موشوري مربع المقطع اضلاعه $L$ موازية لاحداثي $x, y$ عندما يعمل على القضيب بعزم لَيّ $M_t$ ينتج اجهاداً ضمن حدود المرونة ( elastic limit ). للحصول على حل عددي بصيغة لابعدية . خذ الاصل عند احد زوايا المقطع ودع في المعادلتين (5.7.2) , (5.7.3)

$$\phi(\xi,\eta) = \frac{1}{L^2}\psi(x,y); \qquad \xi = \frac{x}{L}; \qquad \eta = \frac{y}{L}, \qquad (5.7.5)$$

حيث نحصل بهذه الطريقة على مسألة $\phi$ الحدودية .

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} + 2 = 0; \qquad \phi(0,\eta) = \phi(1,\eta) = \phi(\xi,0) = \phi(\xi,1) = 0. \qquad (5.7.6)$$

ان مقارنة المعادلة ( 5.7.6 ) بالمعادلة ( 5.6.4 ) ه تبرهن على ان دالة اللي اللابعدي $\phi$ في هذا البند توفي بنفس مسألة القيم الحدودية كتلك للانحراف اللابعدي $\phi$ لغشاء في البند ( 5.6 ) . وباستثناء العامل 2 في المعادلة وحيث ان المعادلتين التفاضليتين ( 5.6.4 )

و ( 5.7.6 ) هما خطيتان . يكون حلهما متناسبا طرديا مع الثابت . ولذلك فان قيم دالة اللي اللابعدي $\phi$ في المعادلة ( 5.7.6 ) هي ضعف قيم انحراف الغشاء $\phi$ في الجدول ( 5.6 ) وبعبارة اخرى فان انحراف الغشاء هو نظير *analogue* لدالة اللي .

يبين الجدول 5.7 قيم دالة اللي اللابعدي $\phi$ ، المأخوذة من حل مسألة الغشاء في الجدول 5.6 وباستعمال $n = 6$

| Point | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $10^4 \cdot \phi$ | 1443 | 1181 | 1304 |
| Point | 4 | 5 | 6 |
| $10^4 \cdot \phi$ | 529 | 780 | 855 |

جدول ( ٧-٥ )

وتأخذ الاجهادات [المعادلة(5.7.1)] وعزم اللي[المعادلة (5.7.4) ] عند التعبير عنها بدلالة $\phi$ [ المعادلة (5.7.5) ] الشكل التالي

$$\tau_{xz} = G\theta L \frac{\partial \phi}{\partial \eta}; \qquad \tau_{yz} = -G\theta L \frac{\partial \phi}{\partial \xi}; \tag{5.7.7}$$

$$M_t = 2G\theta L^4 \int\int \phi \, d\xi \, d\eta \equiv 2G\theta L^4 V, \tag{5.7.8}$$

وتظهر ان مركبتي الاجهاد تتناسبان طردياً مع انحراف الغشاء $\phi$ في اتجاهي $x$, $y$ وان عزم اللي يتناسب طردياً مع الحجم $V$ تحت الغشاء $\phi$ .

وبصورة خاصة . تقع النهاية العظمى للاجهاد في نقطة الوسط $A$ من ضلع المقطع ( شكل5.17 )

$$|\tau_{\max}| = G\theta L \left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_A . \tag{5.7.9}$$

ويمكن الحصول على قيمة النهاية العظمى للانحدار $\partial\phi/\partial\xi$ عند $A$ بمفكوك الفروق الامامية للمشتق الاول من المعادلة(2.5.4). باستعمال فروق قيم $\phi$ في الجدول 5.7, $h = \frac{1}{6}$ ويبين الجدول

| $n$ | $\phi$ | $\Delta\phi$ | $\Delta^2\phi$ | $\Delta^3\phi$ | $\Delta^4\phi$ | $\Delta^5\phi$ | $\Delta^6\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 855 | −406 | 96 | −64 | 0 | 0 |
| 1 | 855 | 449 | −310 | +32 | −64 | 0 | |
| 2 | 1304 | +139 | −278 | −32 | −64 | | |
| 3 | 1443 | −139 | −310 | −96 | | | |
| 4 | 1304 | −449 | −406 | | | | |
| 5 | 855 | −855 | | | | | |
| 6 | 0 | | | | | | |

جدول ( ٨-٥ )

5.8 فروق $\phi$ الامامية المتوالية على طول المحور الوسطي للمقطع . وبواسطة هذا الجدول تعطي المعادلة (2.5.4)

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]_A = \frac{1}{\frac{1}{6}}\left[855 - \tfrac{1}{2}(-406) + \tfrac{1}{3}(96) - \tfrac{1}{4}(-64)\right] = 6636.$$

ولذلك بالمعادلة (5.7.9) مع تذكر العامل $10^4$ المستعمل في الجدول 5.7.

وتختلف القيمة أعلاه بمقدار 1.7 بالمائة عن القيمة $0.675G\theta L$ التي حصل عليها «تيمو شنكو» باستعمال مفكوك متسلسلة أسية $\phi$ power series .*

ويقتني عزم اللّي $M_t$ المناظر بتقييم التكامل المزدوج في المعادلة ( 5.7.8 ) باستعمال قانون سمبسون الثلثي . باستعمال المؤثر $B_4$ من الشكل 5.7 مرة واحدة عند 1 . أربع مرات عند . واربع مرات عند 4 ( الشكل 5.19c ) . باستعمال مؤثر الشكل 5.8 .

$$\iint \phi\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{9\cdot 36}\{4\cdot 1181 + 4\cdot 4\cdot 1304 + 16\cdot 1443$$
$$+ 4[0 + 0 + 0 + 1181 + 4(0 + 0 + 780 + 780) + 16\cdot 529]$$
$$+ 4[0 + 0 + 1181 + 1181 + 4(0 + 780 + 780 + 1304) + 16\cdot 855]\}$$
$$= 685.8.$$

ولذلك

$$M_t = 2\cdot 685.8\cdot 10^{-4}G\theta L^4 = 0.1372G\theta L^4. \qquad \text{(a)}$$

وهذه القيمة اصغر بمقدار 2.42 بالمائة من تلك التي اقتناها « تيموشنكو » من متسلسلة رأسية .

---

* Timoshenko p. 277

## 5.8 حل مسألة في اللي اللدن بالارخاء

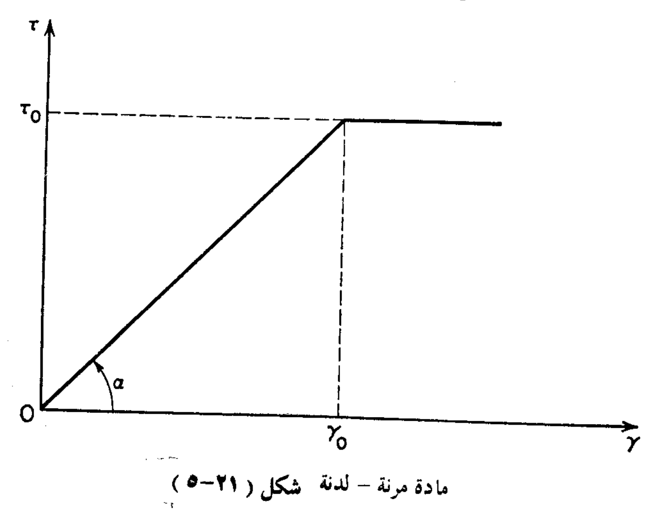
**_Solution of a Problem in Plastic Torsion by Relaxation_**

ان حل مسألة اللي عددياً لاجهادات اكبر من حد المرونة ، أي ضمن مدى اللدونة يقتنى بسهولة بواسطة تناظر الغشاء ( membrane analogy ) في القسم السابــق . ولهذا الغرض . يلاحظ أن حل مسألة اللي المرن بالفروق المحدودة والأرخاء هونظيرلاستبدال الغشاء المتصل continuous بشبكة مرنة . ثم تحمل الشبكة عند العقد ( nodes ) التي تقابل الأرتكاز . وتحتوي معادلة البواقي المناظرة للمعادلة (5.7.6)

$$R_i = (\phi_a + \phi_b + \phi_r + \phi_l - 4\phi_i) + \frac{2}{n^2} \qquad (5.8.1)$$

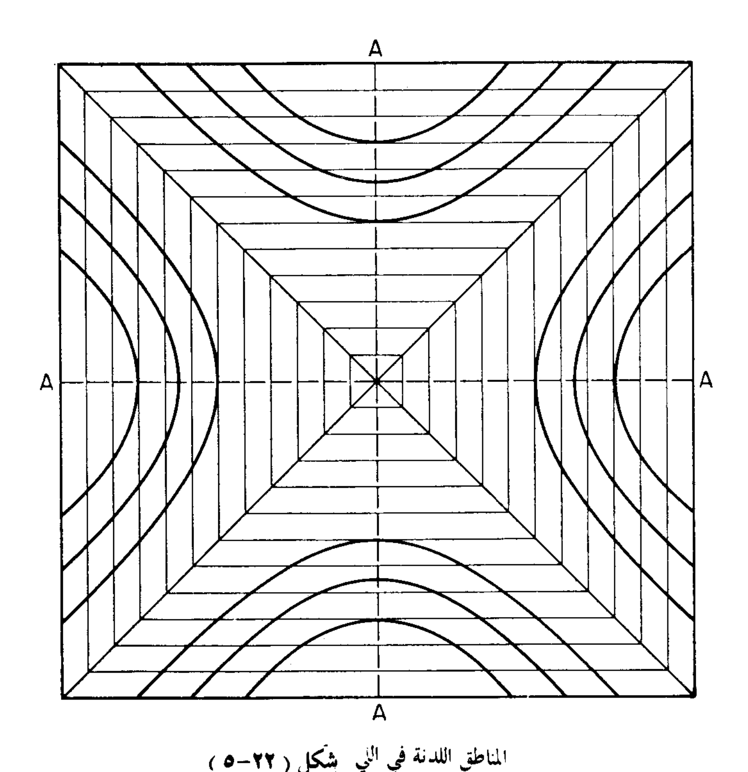
على حد داخل قوسين يتناسب طردياً مع محصلة الشد في الأسلاك الأربعة الملتقية عند العقدة i كما تحتوي على الحد $\frac{2}{n^2}$ والمتناسب طردياً مع الحمل المسلط . ولذا فإن الفضلة تمثل القوة غير المتوازنة ( *unbalanced* ) عند العقدة i . والتي يجب أن تتلاشى لغرض الأتزان equilibrium .

لنفرض أن مادة القضيب الملوي تتصرف بمرونة حتى القيمة $\tau_0$ من أجهاد القص ( shear stress ) $\tau$ ثم بلدونة فيما بعد ذلك . أن أي زيادة في الأستطالة ( strain ) $\gamma$ فيما وراء المرن الأقصى $\gamma$ . أي زيادة البرم $\theta$ عن حد البرم $\theta_0$ . لن تزيد الأجهاد القصي عن $\tau_0$ ( الشكل 5.21 ) .




مادة مرنة – لدنة شكل ( ٢١-٥ )

فإذا أطلق $M_0$ على قيمة عزم اللي الذي يسبب أجهاداً $\tau_0$ في نقاط الوسط $A$ من الحافة ( الشكل 5.22 ) حيث الأجهاد أقصاه . فان زيادة عزم اللي عن $M_0$ تسبب اختراق الأجهاد اللدن $\tau_0$ للمقطع . بحيث يكون الأجهاد في بعض المناطق اللدنة حول النقاط مساوياً $\tau_0$ في كل مكان . من السهل تصور هذه المناطق بالاستعانة بتناظر الغشاء . حينما يزداد عزم اللي $M$ فان نظير $M$ . أي حجم الغشاء $V$ . يزداد أيضاً بسبب ازدياد الضغط $p$ فينتفخ الغشاء ويزداد انحداره . تصورسقفاً زجاجياً ذو انحدار ثابت $m$ . يناظر الأجهاد الأقصى $\tau_0$ موضوعاً فوق الغشاء . بينما ينفتح الغشاء . سيمس السقف . ابتداء من النقاط $A$ وبازدياد الضغط $p$ . ينبسط التماس بين الغشاء والسقف على مناطق « لدنة » أوسع فاوسع كما هو مبين في الشكل 5.22 وفي النهاية . عندما يكون كامل المقطع في المدى اللدن . يتماس الغشاء مع السقف في كل مكان ويكون له شكل هـــرم ..

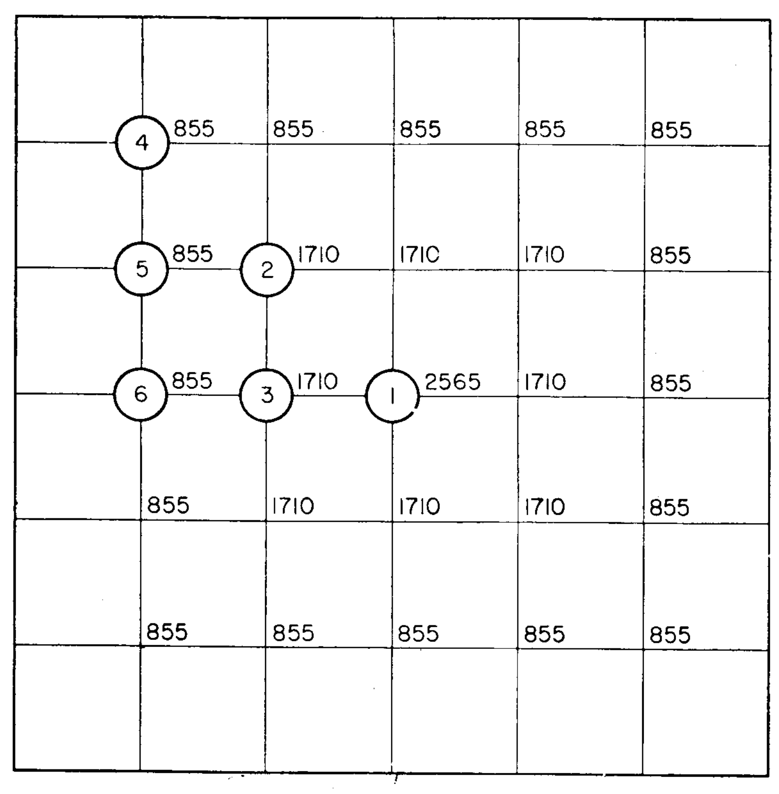



المناطق اللدنة في اللي شكل ( ٢٢-٥ )

من الواضح الآن . أنه بينما يكون الحمل الخارجي $p$ في المناطق المرنة موازنا بالشد $S$ في الغشاء . فإن أية قوة غير موازنة في المناطق اللدنة توازن تلقائيا برد فعل السقف .

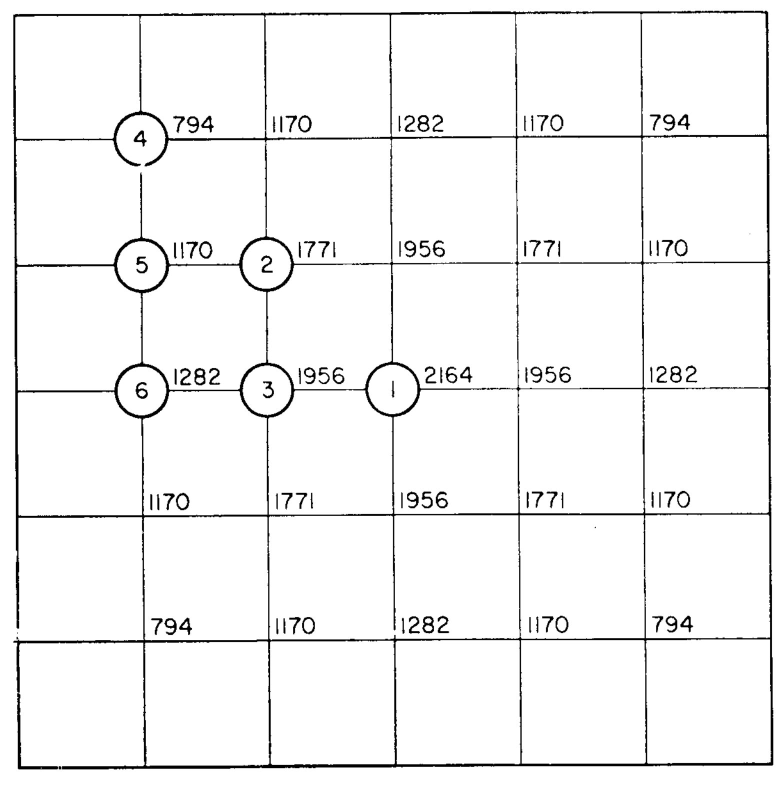
ان ملاحظة « ساوثويل » ( Southwell ) هذه تعطي طريقة بسيطة لحل مسألة اللّي المرن – اللدن .

دعنا نفترض أن الأنحرافات اللابعدية $\phi$ للغشاء كما حسبت الجدول ( 5.7 ) تناظر قيم $\theta_0$ للبرم . وانه لهذا السبب . يكون « انحدار » السطح $\phi$ عند $A$ مناظرا للاجهاد اللدن $\tau_0$ وبتقريب الأنحدارات بالفروق الأولى . يجب أن يؤخذ الثابت للسقف اللدن مساويا الكمية 855 التي هي ارتفاع الغشاء عند نقطة الأرتكاز.مقسما على $h = \frac{1}{6}$ ( الشكل 5.19c ) . وعندئذ يكون ارتفاع نقاط السقف مساوياً 855 للنقاط 6, 5, 4 ومساويا 855 $2 = 1710$ النقاط 3, 2 ومساويا 855 $3 = 2565$ النقطة ( الشكل 5.23 ) .




ارتفاعات السطح اللدنة **شكل (٢٣-٥)**

من ناحية اخرى . حيث ان $\tau$ تناسب طرديا مع $\theta$ بالمعادلة (5.7.9) ان وصل البرم قيمة ما . ولتكن $1.5\theta_0$ . وكانت المادة لاتزال تتصرف بمرونة . فان ارتفاعات الغشاء ستكون مرة ونصف بقدر الارتفاعات المحسوبة في الجدول 5.7 وتكون لها القيم المعطاة في الشكل 5.24 وحيثما تكون الابعاد الصادية في الشكل 5.24 اكبر من مقابلها في الشكل 5.23 فان السقف سيمنع ازاحة displacement الغشاء . ولذا يتوجب خفض الغشاء الى مستوى السقف عند النقاط 2 ,3 ,5 ,6 بواسطة الازاحات السالبة في الجدول 5.9 . وتقيم البواقي الناتجة عن هذه الازاحات بواسطة المعادلة (5.8.1) وتظهر في الجدول 5.10 تذكر ان البواقي تمثل قوى غير موازنة وملاحظة ان البواقي الموجبة قوى غير موازنة اتجاهها الى اعلى يعادلها السقف . لذلك فان البواقي الموجبة تهمل ويتم ارخاء البواقي السالبة فقط في كل خطوة . وقد انجز الارخاء في




شكل 5.24.

**Table 5.9**

| Point | 2 | 3 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| Displacement | 1710 − 1771 = −61 | 1710 − 1956 = −246 | 855 − 1170 = −315 | 855 − 1282 = −427 |

الجدول 5.11 الذي يبين الارتفاعات الجديدة للغشاء الى ثلاثة ارقام . ان الارتفاع عند النقطة 6

**Table 5.10**
**Lowering of Membrane to Roof**

| | 4 | |
|---|---|---|
| 794 | | |
| 0 | | −630 |

| | 5 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 1170 | | | 1771 | |
| −315 | | 772 | −61 | −878 |
| 855 | | | 1710 | |

| | 6 | | 3 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1282 | | | 1956 | | 2164 | |
| −427 | | 832 | −246 | 435 | 0 | −984 |
| 855 | | | 1710 | | 2164 | |

جدول

المناظر للاجهاد اللدن هو 855 كما ان المنطقة اللدنة تمتد الى نقاط بين 6 , 3 وبين 4 , 5

| 4 | |
|---|---|
| 794 | −630 |
| −157.5 | |
| 636.5 | 0 |

| 5 | | 2 | |
|---|---|---|---|
| 855 | +772 | 1710 | −878 |
| 0 | | −282 | |
| 855 | +332.5 | 1428 | 0 |

| 6 | | 3 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 855 | +832 | 1710 | +435 | 2164 | −984 |
| 0 | | −125 | | −371 | |
| 855 | 707 | 1585 | 0 | 1793 | 0 |

جدول (١١-٥)

ويبين الجدول 5.12 نفس الحسابات لبرم $\theta = 1.75\theta_0$ . هنا تمتد المنطقة اللدنة ثانية بين النقاط 6 ، 3 وبين 5،4 غير ان حدودها اقرب الى النقاط 6 ، 4 من الحالة $\theta = 1.5\theta_0$ ويعطي الشكل 5.25 المناطق اللدنة المقابلة الى $\theta = 1.5\theta_0$ والى $\theta = 1.75\theta_0$

**Table 5.12**
**Relaxation of Negative Residuals** ($\theta_2 = 1.75\theta_0$)

Node 4

| | |
|---|---|
| 855 | −736.8 |
| −184.2 | |
| 670.8 | 0 |

Node 5

| | |
|---|---|
| 855 | +971 |
| 0 | |
| 855 | 600.8 |

Node 2

| | |
|---|---|
| 1710 | −736 |
| −186 | |
| 1524 | 0 |

Node 6

| | |
|---|---|
| 855 | +972 |
| 0 | |
| 855 | 968 |

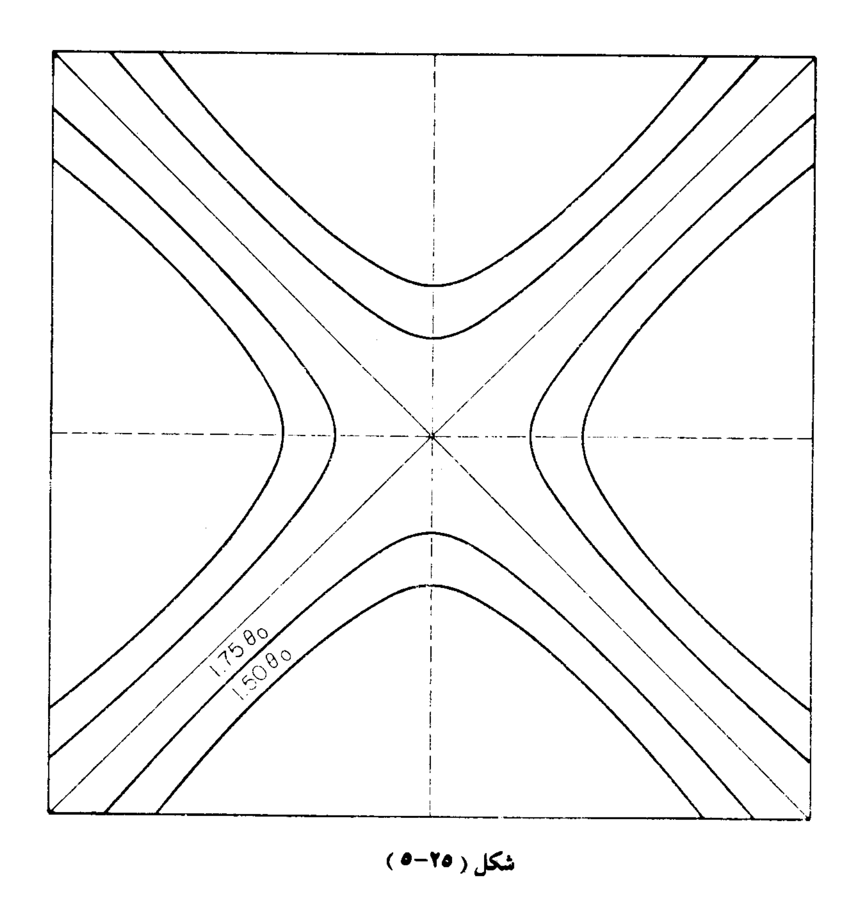
Node 3

| | |
|---|---|
| 1710 | +933 |
| −4 | |
| 1706 | 1 |

Node 1

| | |
|---|---|
| 2525 | −2288 |
| −576 | |
| 1949 | 0 |

جدول ( ١٢-٥ )




**شكل ( ٢٥–٥ )**

اصبح ممكنا الآن حساب تكامل $V$ للدالة المرنة – اللدنة $\phi$ باستعمال قانون سمبسن الثلثي ( البند 5.3b ) عند $1.5\theta_0 = \theta_1$ نحصل على $779.1 = V_1$ وعند $1.75\theta_0 = \theta_2$ نحصل على حجم $810.3 = V_2$

ولغرض الحصول على عزمي اللي المقابلين $M_2, M_1$ نعوض في المعادلة (5.7.8) قيمة $G\theta L$ المعطاة بالمعادلة (5.7.9)

$$M_t = 2G\theta L^4 V - \frac{2\tau_{max}}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_{max}} L^3 V, \qquad (5.8.2)$$

وحيث أن

$$\tau_{max} = \tau_0 \qquad \text{and} \qquad \left|\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right|_{max} = m$$

للحالتين المرنة واللدنة . تكون النسبة

$$\tau_{max} \Big/ \left|\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right|_{max} = \tau_0/m = \text{const.}$$

ثابت

وهكذا فان عزوم الي المرنة واللدن تناسب طرديا مع V

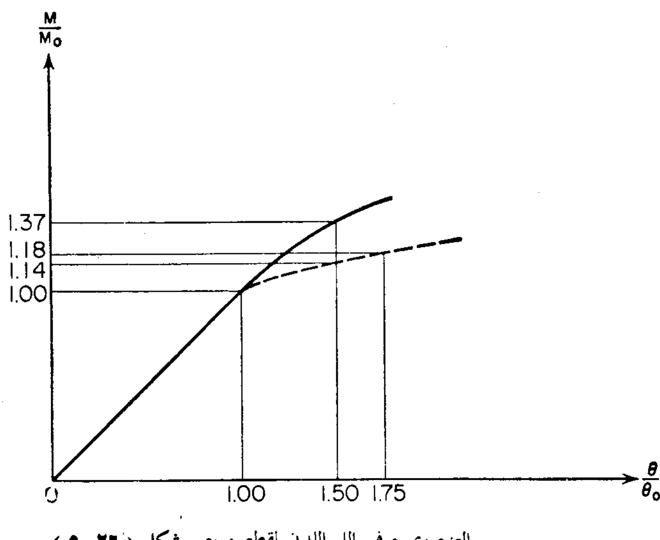
$$\frac{M_1}{M_0} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{779.1}{685.8} = 1.136 \qquad \text{for } \frac{\theta_1}{\theta_0} = 1.5$$

$$\frac{M_2}{M_0} = \frac{V_2}{V_0} = \frac{810.3}{685.8} = 1.182 \qquad \text{for } \frac{\theta_2}{\theta_0} = 1.75$$

ويعطي الشكل 5.26 خطا بيانيا لتغير $M/M_0$ مع $\theta/\theta_0$ كحالتين

الخط المتقطع $\left|\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right|_{max} = \frac{855}{1/6} = 5130$ (broken line)

الخط المتواصل $\left|\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right|_{max} = \frac{1106}{1/6} = 6636$ (continuous line),




العزم وعبرم في الي اللدن لمقطع مربع شكل (٢٦-٥)

وتمثل الحالة الثانية قيمة ادق للانحدار عند $A$ اخذت من الجدول 5.8 وهو مبين في الشكل . ان العلاقة بين عزم اللي وبين البرم هي غير خطية في المدى اللدن كما ان التقريب العددي للانحدار عند الحدود يؤثر كثيراً على النتائج .

## 5.9 اهتزاز الأغشية *Membrane Vibrations*

ان الاسلوب المستعمل في القسم السابق لحل مسألة الي قد يستعمل لحل مسائل الاهتزار الثنائية البعد

تقتني المعادلة التفاضلية للاهتزاز الحر لغشاء باضافة قوى الاستمرارية $-m\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ الى معادلة التوازن ( 5.6.1 ) حيث تمثل $m$ كتلة الغشاء لكل وحدة مساحة . وبجعل الضغط الخارجي $p$ مساويا للصفر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{m}{S}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \qquad (5.9.1)$$

ولايجاد الترددات الطبيعية natural frequencies $\omega$ للغشاء . يفترض ان الدالة $(x,y,t)$ تمثل اهتزازا توافقيا harmonic vibration

$$z(x,y,t) = Z(x,y)\sin\omega t \qquad (a)$$

وتعوض في المعادلة (5.9.1) حيث تصبح بعد القسمة على $\sin\omega t$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{m\omega^2}{S} Z = 0. \qquad (5.9.2)$$

ولحل المسألة بصيغة لابعدية ولغشاء مربع ضلعه ما مسند على حدود مسطحة . تدخل التحويلات المؤلوفة

$$x = \xi L; \qquad y = \eta L \qquad (b)$$

على المعادلة (5.9.2) حيث تصبح

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} + KZ = 0, \qquad (5.9.3)$$

حيث

$$K = \frac{mL^2}{S}\omega^2. \qquad (5.9.4)$$

ومن ثم تحول المعادلة (5.9.3) الى معادلة فروقية بمؤثر الشكل 5.3b وباستعمال $h^2 = 1/n^2$:

$$Z_a + Z_b + Z_r + Z_l + \left(\frac{K_n}{n^2} - 4\right) Z_i = 0. \qquad (5.9.5)$$

وتتطلب الشروط على الحدود كون

$$Z = 0 \text{ على الحدود} \qquad (5.9.6)$$

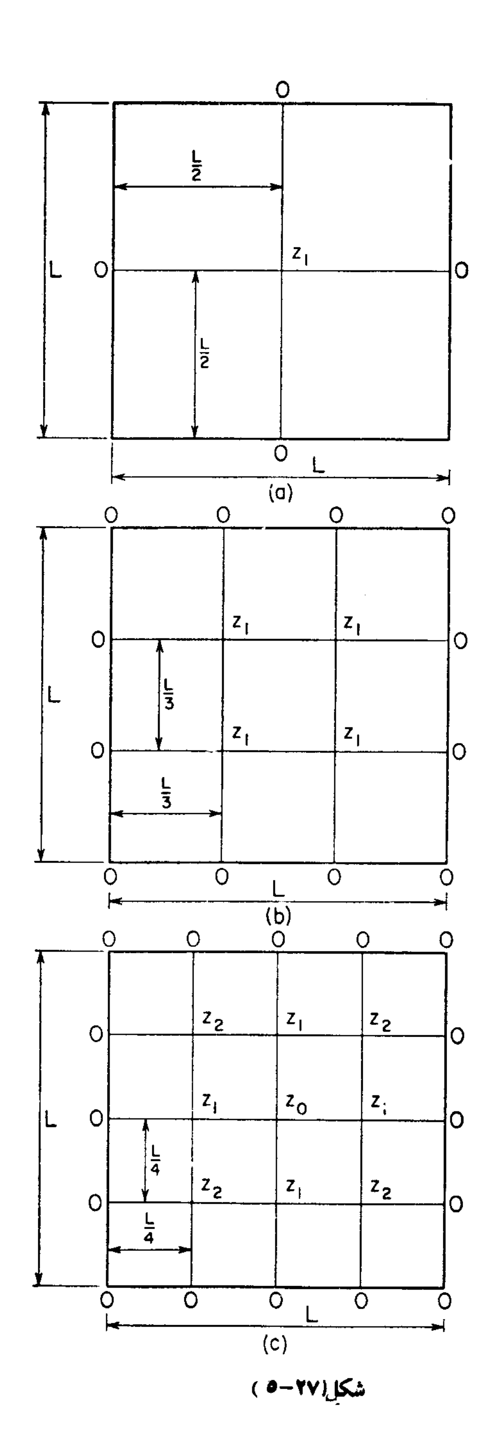
نقيم $n = 2, 3$ ( للشكل 5.27a , 5.27b ) تعطي المعادلة (5.9.5)

$$n = 2; \quad \left(\frac{K_2}{4} - 4\right) Z_1 = 0; \quad K_2 = 16 \quad (e = +19\%)$$

$$n = 3; \quad Z_1 + 0 + Z_1 + 0 + \left(\frac{K_3}{9} - 4\right) Z_1 = 0; \quad K_3 = 18 \quad (e = +9\%)$$

وتكون المعادلة المحددة determinantal equation لقيمة $n = 4$ (شكل 5.27c )

$$\begin{vmatrix} \frac{K_4}{16} - 4 & 2 & 0 \\ 2 & \frac{K_4}{16} - 4 & 1 \\ 0 & 4 & \frac{K_4}{16} - 4 \end{vmatrix} = 0$$




شکل(۲۷-۵)

وجذرها الاصغر هو :

$$K_4 = 18.75 \quad (e = +5\%).$$

وتكون قيم $K$ المستوفاة

$K_{2,3} = 19.60 \quad (+0.7\%); \qquad K_{3,4} = 19.71 \quad (+0.15\%);$ extrapolated

$$K_{2,3,4} = 19.75 \quad (-0.051\%).$$

حيث ان قيمة $K$ الصحيحة هي 19.739.

## 5.10 نقاط الأرتكاز قرب الحدود المنحنية

***Pivotal Points Near Curved Boundaries***

في كافة المسائل في البنود السابقة كانت نقاط الارتكاز داخل مجالات مستطيلة الشكل وعلى حدودها تقع على اركان corners شبك مستطيل كما انها كانت بالنسبة للمحورين الاحداثيين $x$ , $y$ زوجية الفواصل evenly spaced وعندما يتحدد مجال ذو بعدين مغطى بشبكة مستطيلة بمنحنيات بدلا من خطوط مستقيمة ، قد لايقع بعض او جميع نقاطها الارتكازية الحدية على اركان الشبكة المستطيلة ولذلك فان قوانين خاصة يجب استعمالها عند نقاط الارتكاز المجاورة للحدود .

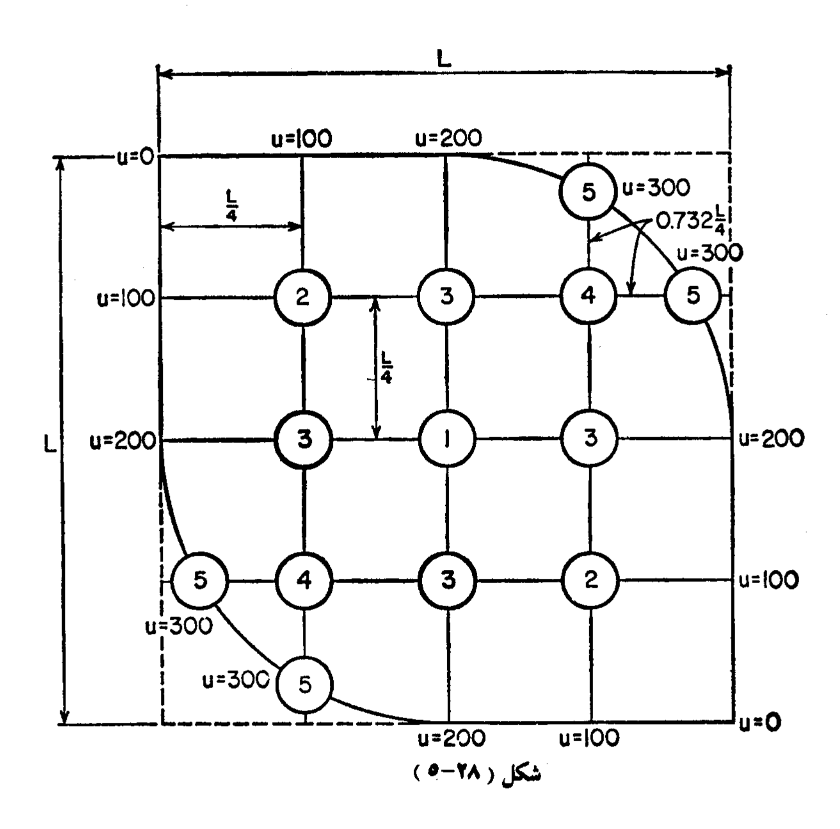
لنتخذ المثال الخاص بمسألة درجة الحرارة المطردة steady-state لصفيحة معدنية والواردة في الشكل 5.28 ، حيث نجد ان الصفيحة مربعة الشكل طول ضلعها $L$ وان كل من اركانها محاطة باقواس دائرية نصف قطرها $= \frac{1}{2} L$

ان درجة الحرارة $u$ في الصفيحة تحقق معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ ( البند 5.4 ) وهذه المعادلة يمكن تحويلها الى معادلة الفروق بموجب مؤثر الشكل 5.3b في النقاط (1) (2) , (3) , لكن النقطة (4) ليست منتظمة الفواصل بالنسبة لنقاط الارتكاز المجاورة حيث يجب ان تعامل بواسطة معادلة خاصة .

ان معادلة الفروق $\nabla^2 u = 0$ في النقطة العليا (4) مثلا يمكن الحصول عليها بموجب المعادلة (2.2.3) التي تصبح في الحالة التي نحن بصددها على الصورة التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\frac{2}{\alpha(\alpha+1)}[\alpha u_l - (1+\alpha)u_i + u_r] + 0(h); \qquad \text{(a)}$$

$$\alpha = \frac{x_r - x_i}{h} = \frac{x_5 - x_4}{L/4}, \qquad \text{(b)}$$




شكل (٥-٢٨)

وبموجب المعادلة المناظرة لاتجاه $y$ تصبح

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\frac{2}{\beta(\beta+1)}[\beta u_b - (1+\beta)u_i + u_a] + 0(h); \qquad \text{(c)}$$

$$\beta = \frac{y_a - y_i}{h} = \frac{y_5 - y_4}{L/4} \qquad \text{(d)}$$

وباضافة المعادلة (a) الى (c) فان المؤثر $\nabla^2 u$ يحصل بالصيغة :

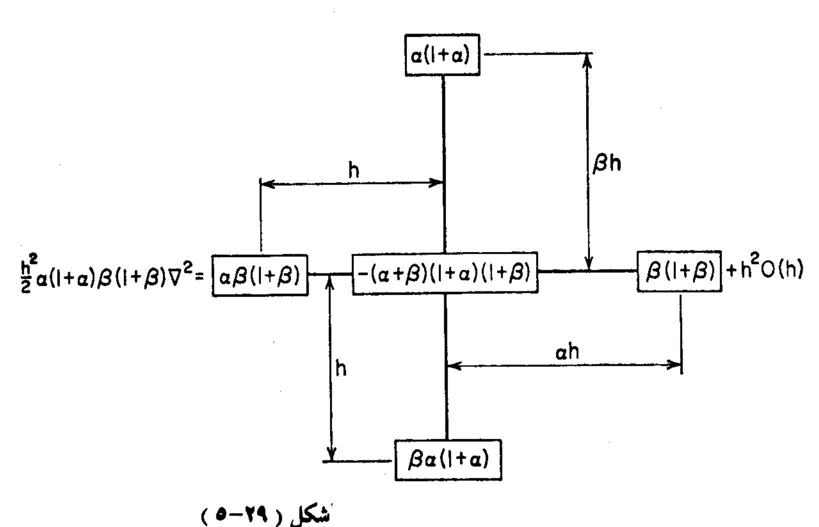
$$\frac{h^2}{2}\alpha(1+\alpha)\beta(1+\beta)\nabla^2 u = \beta(1+\beta)[\alpha u_l - (1+\alpha)u_i + u_r] + \alpha(1+\alpha)[\beta u_b - (1+\beta)u_i + u_a], \qquad (5.10.1)$$

والتي وردت ايضا في جزي شكل 5.29

وفي مسألة شكل 5.28 فان $\alpha = \beta$ ومؤثر شكل 5.29 يصبح بعد القسمة على $(1 + \alpha)$ مؤثر شكل 5.30

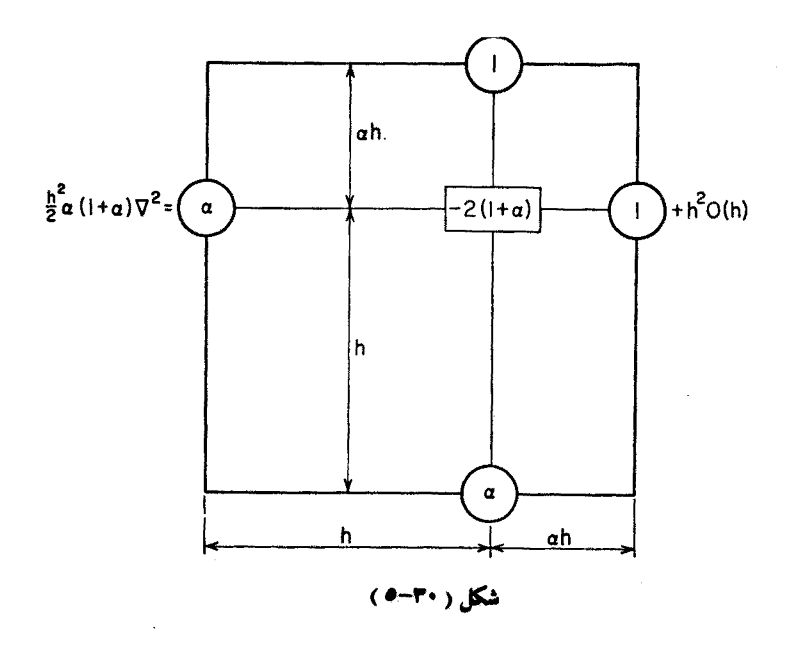
واذا استعملنا مؤثر شكل $\nabla^2 u$ في النقاط (1), (2), (3) فاننا نحصل على منظومة (مجموعة) من المعادلات الخطية الى $u_i$ المعطاة في الجدول 5.13 والتي جذورها هي :

$$u_1 = 203.7; \quad u_2 = 151.9; \quad u_3 = 203.7; \quad u_4 = 259.3.$$




شكل (٢٩-٥)

المؤثر $\nabla^2$ للنقاط الزوجية الفواصل




شكل ( ٣٠-٥ )

لمؤثر الشكل 5.30 خطأ رتبته $h$ بينما مرتبة الشكل 5.3b هي $h^2$

ولكي نحصل على اخطاء متوائمة consistent errors خلال المجال فانه يمكن التعبير عن $\nabla^2 u$ بواسطة مؤثر المعادلة (2.3.6) ، غير ان هذا لايغير الارقام الاربع الاولى في $u_i$ في هذا المثال ( انظر المسألة 5.32 )

شكل ( ٣١-٥ )

| Point | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −4 | 0 | 4 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | −4 | 2 | 0 | −200 |
| 3 | 1 | 1 | −4 | 1 | −200 |
| 4 | 0 | 0 | 1.464 | −3.464 | −600 |

ان نمط صيغ الفروق المستعملة في هذا البند تستعمل ايضاً في المسائل المشتملة على مايسمى بالشبكات المدرجة *graded nets* ( انظر البند5.5) هذه الشبكات التي تختلف احجام عيونها في المناطق المختلفة من المجال . تستعمل عندما تكون الدالة المراد تعيينها تتغير بسرعة كبيرة في منطقة ما . حيث ان عين شبكة اصغر يعطي دقة اكبر عند النقاط التي

تحتاج اليها . حيث ان الاسلوب المفصل والخاص بالشبكات المدّرجة هو خارج نطاق هذا الكتاب فان في وسع القاريء الرجوع الى كتب Southwell والى الابحاث التي تخص هذا الموضوع

## 5.11 مؤثر بواسان المُحسّن في المحاور الأحداثية المتعامدة

***An Improved Poissonian Operator in Cartesian Coordinates***

ان مؤثر الفرق اللابلاسي difference Laplacian operator للشكل 5.3b يتأثر بخطأ من المرتبة $h^2$ . وهو ( أي مؤثر الفرق ) :

$$Hz_i \equiv z_a + z_b + z_r + z_l - 4z_i \doteq h^2\nabla^2 z_i \qquad (5.11.1)$$

يؤثر الخطأ من المرتبة نفسها على مؤثر لابلاس القطري *diagonal Laplacian operator* في المحاور الاحداثية : $\xi, \eta$

$$Xz_i \equiv z_{ar} + z_{bl} + z_{al} + z_{br} - 4z_i \doteq (\sqrt{2}\,h)^2\nabla^2 z_i \qquad (5.11.2)$$

للشكل 5.31. سوف يتبين الآن بان المتوافق الخطية الى $Hz_i$ والى $Xz_i$ يمكن ان تصاغ بحيث يكون الخطأ فيها من المرتبة $h^4$ .

ولهذه الغاية لنأخذ معادلة بواسان Poissonian equation

$$\nabla^2 z = f(x,y), \qquad (5.11.3)$$

ثم نعوض عن $h^2\nabla^2 z$ المؤثر $Hz$ مع الحد الاول من مفكوك الخطأ ينتج :

$$h^2\nabla^2 z \doteq Hz - \frac{h^4}{12}(z_{xxxx} + z_{yyyy}) \doteq h^2 f, \qquad (a)$$

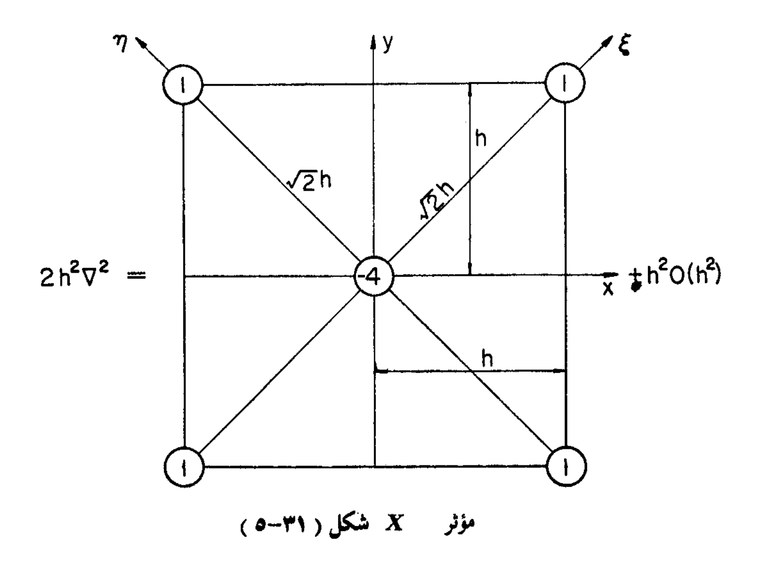
حيث الملحقات هنا تدل على المشتقات الجزئية .

وباضافة وطرح $(2h^4/12)z_{xxyy}$ الى الطرف الثاني من المعادلة (a) على ان نلاحظ في ضوء المعادلة (5.11.3) ان

$$\nabla^4 z = \nabla^2 f, \qquad (b)$$

نحصل على

هامش ص 234




مؤثر X شكل (٥-٣١)

$$h^2\nabla^2 z \doteq \boldsymbol{H}z - \frac{h^4}{12}\nabla^2 f + \frac{h^4}{6} z_{xxyy} \doteq h^2 f. \qquad \text{(c)}$$

لنتناول مؤثر لابلاس القطري $Xz$ والحد الاول من مفكوك خطأ

$$\boldsymbol{X}z = 2h^2(z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta}) + \frac{4h^4}{12}(z_{\xi\xi\xi\xi} + z_{\eta\eta\eta\eta})$$

$$= 2h^2(z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta}) + \frac{4h^4}{12}(z_{\xi\xi\xi\xi} + 2z_{\xi\xi\eta\eta} + z_{\eta\eta\eta\eta}) - \frac{8h^4}{12} z_{\xi\xi\eta\eta}. \qquad \text{(d)}$$

وبما ان كلا من المؤثرين $\nabla^4, \nabla^2$ لا متغير invariant

بالنسبة لتدوير المحاور الاحداثية فانهما متطابقان سواء اخذناهما بالنسبة الى $x, y$ اوبالنسبة الى $\xi, \eta,$

وان المعادلة (d) يمكن ان تكتب على الصورة التالية وبموجب المعادلات (5.11.3)، (b)،

$$2h^2\nabla^2 z \doteq \boldsymbol{X}z - \frac{h^4}{3}\nabla^2 f + \frac{2}{3}h^4 z_{\xi\xi\eta\eta} \doteq 2h^2 f. \qquad \text{(e)}$$

وباستعمال التحويل الخطي linear transformation الذي يغير $\xi, \eta$ الى $x, y$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \eta); \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi + \eta), \qquad \text{(f)}$$

تصبح مشتقات $z$ بالنسبة الى $\xi$ . $\eta$ على الصورة التالية :

$$z_\xi = z_x x_\xi + z_y y_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_x + z_y);$$

$$z_\eta = z_x x_\eta + z_y y_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_y - z_x);$$

$$\begin{aligned} z_{\xi\xi} &= \tfrac{1}{2}(z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy}); \\ z_{\eta\eta} &= \tfrac{1}{2}(z_{yy} - 2z_{xy} + z_{xx}); \\ z_{\xi\xi\eta\eta} &= \tfrac{1}{4}[(z_{xxxx} - 2z_{xxxy} + z_{xxyy}) + 2(z_{xxxy} - 2z_{xxyy} + z_{xyyy}) \\ &\qquad + (z_{xxyy} - 2z_{xyyy} + z_{yyyy})] = \tfrac{1}{4}[z_{xxxx} - 2z_{xxyy} + z_{yyyy}] \\ &= \tfrac{1}{4}\nabla^4 z - z_{xxyy} = \tfrac{1}{4}\nabla^2 f - z_{xxyy}. \end{aligned} \tag{g}$$

وبتعويض المعادلة (g) في المعادلة (e) ينتج في النهاية

$$2h^2\nabla^2 z \doteq \boldsymbol{X}z - \frac{h^4}{6}\nabla^2 f - \frac{4}{6}h^4 z_{xxyy} \doteq 2h^2 f \tag{h}$$

باضافة المعادلة (c) بعدضربها في 4 الى المعادلة (h). فان حد الخطأ في $h^4$ بحذف ويعبر عن المؤثر $\nabla^2 z$ بدلالة قاعدة النقاط التسعة nine-point formula حيث الخطأ فيه هو من المرتبة $h^4$ :

$$6h^2\nabla^2 z \doteq (4\boldsymbol{H} + \boldsymbol{X})z \doteq 6h^2 f + \frac{h^4}{2}\nabla^2 f. \tag{5.11.4}$$

ان المؤثر

$$\boldsymbol{N} \equiv 4\boldsymbol{H} + \boldsymbol{X} \tag{5.11.5}$$

قد مثل بالشكل 5.32 حيث كان $\nabla^2 f = 0$ فان المعادلة (5.11.4) تتبسط الى

$$h^2\nabla^2 z \doteq \tfrac{1}{6}\boldsymbol{N}z_i \doteq h^2 f \quad (\nabla^2 f = 0). \tag{5.11.6}$$

وحيثما كانت $f = 0$ فان مؤثر الفرق اللا بلاسي الذي خطأه من المرتبة $h^4$ يصبح :

$$z_i = \tfrac{1}{20}[4(z_a + z_b + z_r + z_l) + (z_{ar} + z_{br} + z_{al} + z_{bl})]. \tag{5.11.7}$$

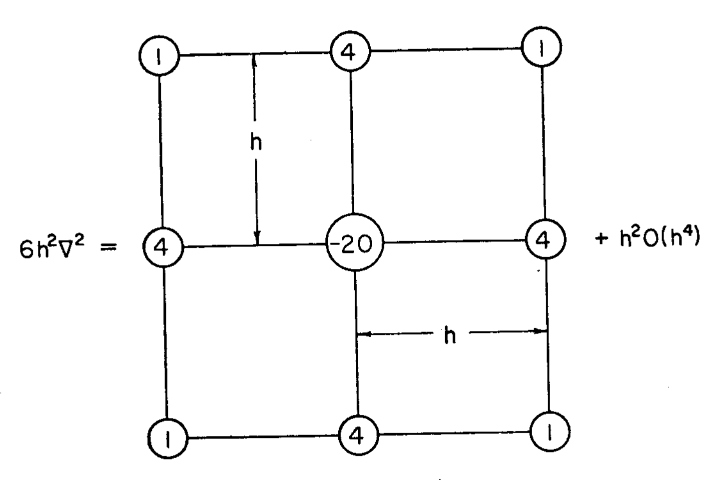



**Fig. 5.32.** N **operator.**

**شكل 5.32**

الجدول 5.14 يعطينا حل مسألة المؤثر *N* معادلة لابلاس الواردة في البند 5.4 بموجب المعادلة (5.11.7) والتي ينبغي مقارنتها بالجدول 5.3 لادراك الالتمام السريع لمؤثر *N* والاثر المسمى بخطأ حجم الشبكة mesh-size lumping error الحاصل في الحلول بموجب المؤثرات المختلفة .

**Table 5.14**

| $n$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4375 | 5312 | 1875 | 2500 | 625 | 938 |
| 1 | 4312 | 5412 | 1805 | 2486 | 673 | 947 |
| 2 | 4318 | 5405 | 1813 | 2495 | 677 | 951 |
| 3 | 4318 | 5408 | 1817 | 2498 | 679 | 953 |
| 4 | 4320 | 5409 | 1818 | 2500 | 679 | 953 |
| 5 | 4320 | 5410 | 1818 | 2500 | 679 | 953 |
| 6 | 4320 | 5410 | 1818 | 2500 | 679 | 953 |

**جدول 5.14**

## *5.12* المؤثر اللابلاسي في المحاور الأحداثية ( المائلة )

### *The Laplacian Operator in Skew Coordinates*

مؤثرات الفرق في المحاور الاحداثية الديكارتية قد استخدمت جيدا في المسائل الحاوية على مجالات مستطيلة . وعندما نجعل المجال متوازي اضلاع فانه غالبا ما يكون من الابسط والأكثر دقة ان نستعمل محاور احداثية فانه في الغالب موازية لأطراف المتوازي الاضلاع . أي المحاور الاحداثية المائلة *skew coordinates*

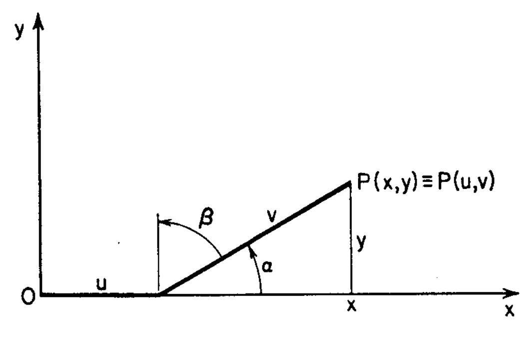



Fig. 5.33.

شكل (٣٣-٥)

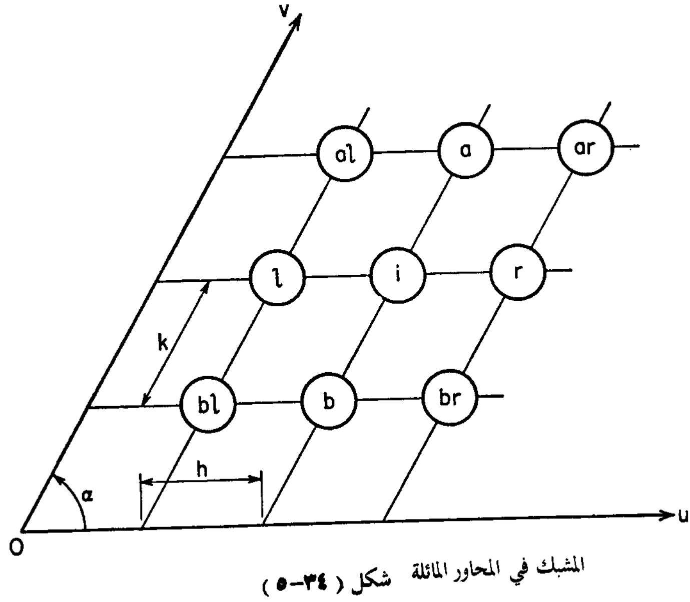
فاذا كانت $(x,y)$ هي النقطة في المحاور الاحداثية الديكارتية وكانت $(u,v)$ هي النقطة في مستوى المحاور الاحداثية المائلة فان العلاقة بين النظامين تكون :

$$x = u + v \cos \alpha; \qquad y = v \sin \alpha, \qquad (5.12.1)$$

حيث $\alpha$ هي الزاوية المتممة complement الى زاوية الميل $\beta$ *skew angle* فاذا رمزنا الى مشتقات $x$، $y$ بالنسبة الى $v, u$ على التناظر بالرموز السفلية subscript ينتج :

$$x_u = 1; \qquad x_v = \cos \alpha; \qquad y_u = 0; \qquad y_v = \sin \alpha. \qquad (a)$$

لنأخذ الدالة $z(u,v)$ حيث $u, v$ ترتبطان مع $x, y$ بالمعادلة (5.12.1) فان المشتقة الأولى الى $z$ بالنسبه الى $v, u$ نحصل عليها بموجب قاعدة تفاضل الدوال المركبة composite وهي :




المشبك في المحاور المائلة شكل (٣٤-٥)

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x$$
$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x \cos\alpha + z_y \sin\alpha.$$

المشتقات الثانية تقتني من تربيع المؤثرات $z_u, z_v$ ومن حاصل ضربهما وهي :

$$z_{uu} = z_{xx} \qquad \text{(b)}$$
$$z_{vv} = z_{xx}\cos^2\alpha + 2z_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + z_{yy}\sin^2\alpha \qquad \text{(c)}$$
$$z_{uv} = z_{xx}\cos\alpha + z_{xy}\sin\alpha. \qquad \text{(d)}$$

وبتعويض المعادلات (b) ,(d) في (c)

$$z_{vv} = z_{uu}\cos^2\alpha + 2\cos\alpha(z_{uv} - z_{uu}\cos\alpha) + z_{yy}\sin^2\alpha,$$

حيث تكون $z_{yy}$ بدلالة الحدود $z_{uu}, z_{vv}, z_{uv}$ كما يـلي :

$$z_{yy} = \frac{1}{\sin^2\alpha}(z_{vv} - 2z_{uv}\cos\alpha + z_{uu}\cos^2\alpha),$$

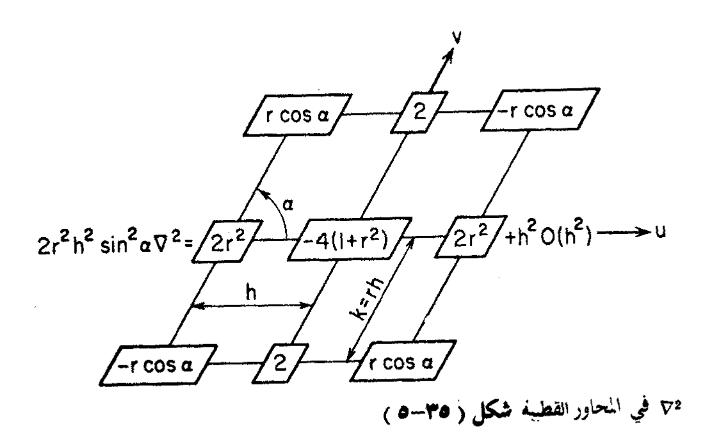
وبموجب المعادلة (h) يكون المؤثر اللابلاسي في المحاور المائلة :
وتؤول المعادلة (5.12.2) الى

$$(\sin^2\alpha)\nabla^2 z = z_{uu} - 2z_{uv}\cos\alpha + z_{vv}. \qquad (5.12.2)$$

$$\nabla^2 z = z_{uu} + z_{vv}.$$

عندما تكون $\alpha = \pi/2$

ويحول المؤثر $\nabla^2$ في المحاور الاحداثية المائلة الى نظيره مؤثر الفرق وذلك بتعويض المشتقات $z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}$ أي بالتعابير التي تمثلها هذه المشتقات الواردة في شكل 2.8a .
وبموجب رموز الشكل 5.34 ينتج :




$\nabla^2$ في المحاور القطبية شكل ( ٥-٣٥ )

$$h^2 z_{uu} = z_r - 2z_i + z_l; \qquad k^2 z_{vv} = z_a - 2z_i + z_b;$$

$$4hkz_{uv} = z_{ar} - z_{br} - z_{al} + z_{bl},$$

كما ياخذ المؤثر $\nabla^2$ صيغة الجزىء الوارد في الشكل 5.35 حيث $r = k/h$ وقد يستعمل مؤثر الشكل 5.35 مثلا في تعيين انحراف المركز $w$ لصفحة مائلة اضلاعها $a = b$ وزاوية ميلها $30°$ $(\alpha = 60°)$ . تستند ببساطة على محيطها ومنتظمة التحميل ان المسألة المتناظرة تؤول الى تكامل المعادلتين

$$\nabla^2 M = -q; \qquad \nabla^2 w = -M/D \qquad \text{(e)}\cdots$$

علما بأن شروطها عند الحدود هي $w = 0$ $M = 0$; وعندما $a = b, r = 1$ ...(f) $n = 2, \alpha = 60°$ يصبح مؤثر الشكل 5.35 هو مؤثر الشكل 5.36 باستعمال $h = a/2$ نحصل عند مركز الصفيحة من اولى المعادلتين في (e)

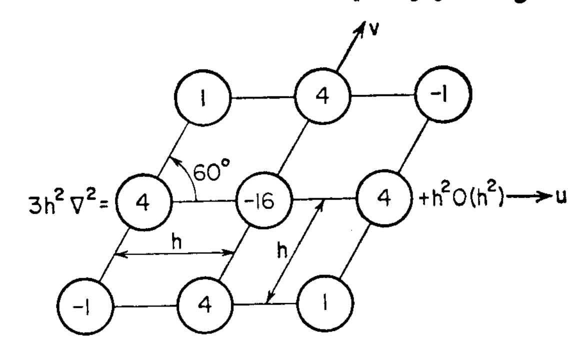
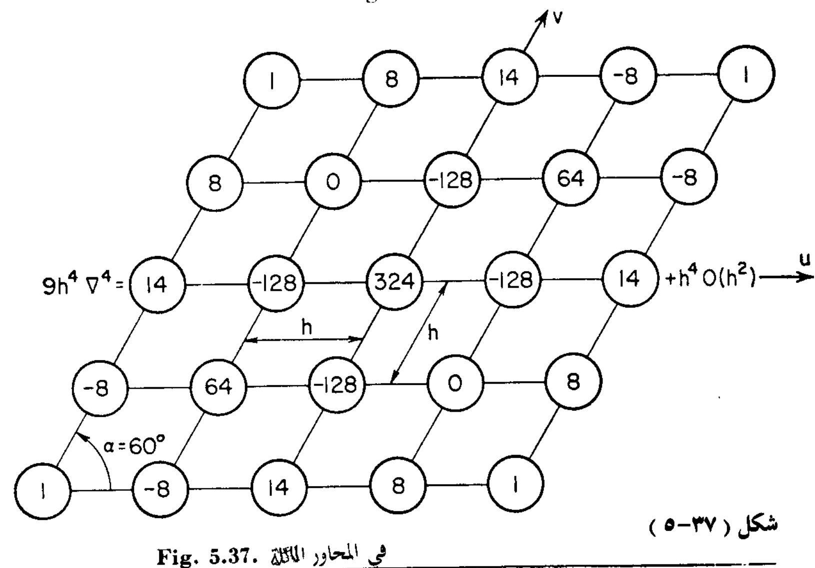



**Figure 5.36**




شكل (٣٧-٥)

**Fig. 5.37.** في المحاور المائلة

---

هامش ص 239 )

$\nabla^4$ في المحاور المائلة $\alpha = 60°, h = k$

المعادلتين في (e) $\frac{-16}{3(a/2)^2} M_0 = -q \quad \therefore \quad M_0 = \frac{3}{64} qa^2,$

والثانية في (e) $\frac{-16}{3(a/2)^2} w_0 = -\frac{3}{64}\frac{qa^2}{D} \quad \therefore \quad w_0\Big]_2 = 0.00220\frac{qa^4}{D}.$

باستعمال $n = 4$ وحل النظام المناظر المؤلف من اربعة معادلات آنية . نجد بأن

$w_0]_4 = 0.00241 qa^4/D$

كما ان استيفاء $h^2$ يعطي :

$$w_0\Big]_{2,4} = 0.00248\frac{qa^4}{D}$$

ومن السهل ان نحصل على المؤثر $\nabla^4$ في المحاور الاحداثية المائلة في كل دالة عددية حالما يكون $\nabla^2$ معلوما . مثال ذلك باستعمال المؤثر $\nabla^2$ للشكل 5.36 ينتج :

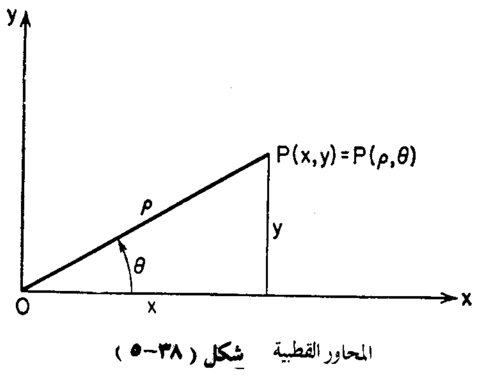
$$9h^4\nabla^4 z_i = 3h^2[(\nabla^2 z_{al} - \nabla^2 z_{ar} - \nabla^2 z_{bl} + \nabla^2 z_{br}) + 4(\nabla^2 z_a + \nabla^2 z_b + \nabla^2 z_r + \nabla^2 z_l) - 16\nabla^2 z_i],$$

ويصبح $\nabla^4$ هو مؤثر الشكل 5.37

## 5.13 مؤثر لابلاس في المحاور القطبية :

***The Laplacian Operator in Polar Coordinates***

نستعمل المحاور القطبية ( شكل 5.38 ) فيما يخص المجالات الدائرية وتقتني من الاحداثيات الديكارتية من خلال التحويلات .




المحاور القطبية **شكل ( ٥-٣٨ )**

$$x = \rho \cos \theta; \qquad y = \rho \sin \theta;$$
$$\rho = +(x^2 + y^2)^{1/2}; \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \qquad (5.13.1)$$

ان مشتقات $\rho$ ، $\theta$ الجزئية بالنسبة الى $x$ ، $y$ وبموجب المعادلات ( 5.13.1 ) هي كالاتي :

$$\rho_x = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{x}{\rho} = \cos \theta; \qquad \rho_y = \frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \sin \theta;$$
$$\theta_x = - \frac{y/x^2}{1 + (y/x)^2} = - \frac{y}{\rho^2} = - \frac{\sin \theta}{\rho}; \qquad (a)$$
$$\theta_y = \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

لنأخذ الدالة $z(\rho,\theta)$، حيث فيها كل من $\rho$ ، $\theta$ دالة الى $x$ ، $y$ من خلال المعادلات ( 5.13.1 ) . نجد ان مشتقة $z$ الجزئية الاولى بالنسبة الى $x$, $y$ وبموجب تفاضل الدوال المركبة ( composite (a) تتحدد كالاتي :

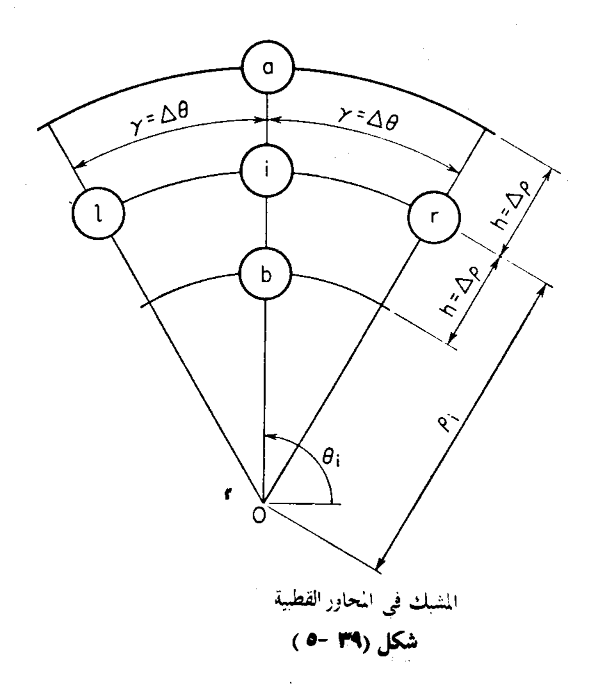
$$z_x = z_\rho \rho_x + z_\theta \theta_x = z_\rho \cos \theta - z_\theta \frac{\sin \theta}{\rho};$$
$$z_y = z_\rho \rho_y + z_\theta \theta_y = z_\rho \sin \theta + z_\theta \frac{\cos \theta}{\rho}. \qquad (b)$$

وبتربيع اول معادلة في (b) نحصل على :

$$z_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho}\right)\left(z_\rho \cos \theta - z_\theta \frac{\sin \theta}{\rho}\right)$$
$$= z_{\rho\rho} \cos^2 \theta + z_\rho \frac{\sin^2 \theta}{\rho} + z_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} - 2z_{\rho\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho}$$
$$+ 2z_\theta \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho^2}. \qquad (c)$$

ونقتني $z_{yy}$ اما بان تربع المعادلة الثانية من (b) او ان تغير $\theta$ الى $\theta + \pi/2$ أي يحول $\cos \theta$ الى $\sin \theta$ و $\sin \theta$ الى $-\cos \theta$ في المعادلة (c) وبذلك نحصل على :

$$z_{yy} = z_{\rho\rho} \sin^2 \theta + z_\rho \frac{\cos^2 \theta}{\rho} + z_{\theta\theta} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} + 2z_{\rho\theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho}$$
$$- 2z_\theta \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho^2}. \qquad (d)$$




المشبك في المحاور القطبية

**شكل (٣٩ -٥)**

وباضافة المعادلة (c) الى (d) يصبح المؤثر اللابلاسي على الصورة التالية :

$$\nabla^2 z = z_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} z_\rho + \frac{1}{\rho^2} z_{\theta\theta}. \qquad (5.13.2)$$

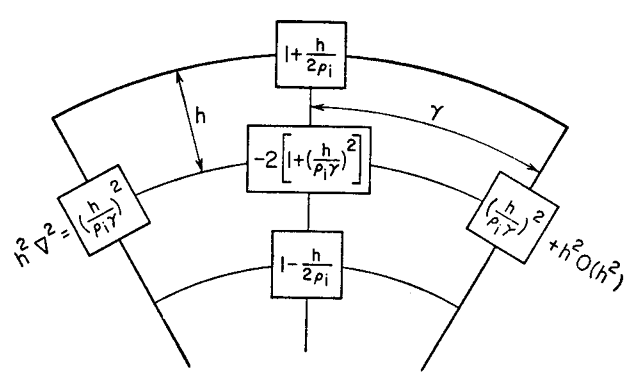
حيث

بموجب مؤثرات الشكل 2.8a ورموز الشكل 5.39 فان مشتقات المعادلة (5.13.2) يمكن تقريبها بما يلي :

$$z_{\rho\rho} = \frac{1}{h^2}(z_a - 2z_i + z_b); \quad z_\rho = \frac{1}{2h}(z_a - z_b); \quad z_{\theta\theta} = \frac{1}{\gamma^2}(z_r - 2z_i + z_l),$$

$$h = \Delta\rho; \qquad \gamma = \Delta\theta \qquad (5.13.3)$$

وبهذا يتخذ اللابلاسي الصيغة الواردة في (5.40) وعندما تكون المسألة متماثلة حول نقطة الاصل . اي ان $z$ لاتعتمد على $\theta$ يصبح المؤثر $\nabla^2$ المؤثر العادي الوارد في الشكل 5.41 .




شكل **5.40.** $\nabla^2$ in polar coordinates.

$$h^2\nabla^2=h^2\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right]= \boxed{1-\frac{h}{2\rho_i}} \text{———} \boxed{-2} \text{———} \boxed{1+\frac{h}{2\rho_i}} + h^2O(h^2) \longrightarrow \rho$$

l     i     r

h     h

**شكل ( ٥-٤١ )**

يمكن استعمال مؤثر الشكل 5.41 لتعيين الانحرافات ( deflections )( $w$ ) عند نقاط ارتكاز الغشاء الخلفي الذي نصف قطره الداخلي $= a$ ونصف قطره الخارجي $= 2a$ الناتجة من الضغط المنتظم $p$ ( شكل 5.42 ) وفي هذه الحالة وبسبب التماثل تؤول المعادلة ( 5.6.1 ) التي تحكم انحراف الغشاء الى :

$$\frac{d^2w}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho}+\frac{p}{S}=0, \qquad \text{(e)}$$

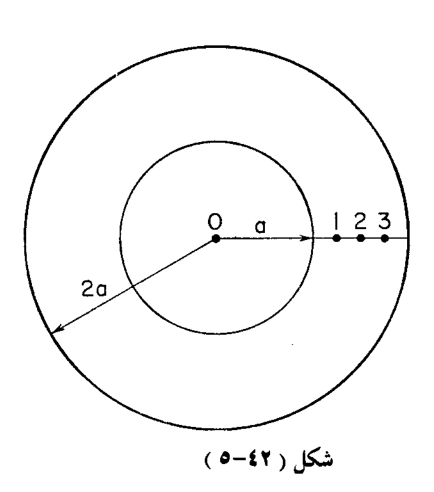
واذا جعلنا :

$$\rho = ax; \qquad w=\frac{pa^2}{S}z; \qquad h=\frac{1}{n}, \qquad \text{(f)}$$

فان معادلة الفرق المناظرة تصبح على الصورة التالية :

$$\left(1-\frac{1}{2nx_i}\right)z_l-2z_i+\left(1+\frac{1}{2nx_i}\right)z_r=-\frac{1}{n^2}. \qquad \text{(g)}$$

وبتقسيم عرض الغشاء الى اربعة اقسام متساوية . عرض القسم الواحد يبلغ $\frac{a}{4}$ فان المعادلة ( g ) تعطينا :




شكل ( ٤٢-٥ )

$$x = \tfrac{5}{4} \qquad 0 - 2z_1 + \left(1 + \frac{1}{8(\frac{5}{4})}\right) z_2 = -\frac{1}{16};$$

$$x = \tfrac{3}{2} \qquad \left(1 - \frac{1}{8(\frac{3}{2})}\right) z_1 - 2z_2 + \left(1 + \frac{1}{8(\frac{3}{2})}\right) z_3 = -\frac{1}{16};$$

$$x = \tfrac{7}{4} \qquad \left(1 - \frac{1}{8(\frac{7}{4})}\right) z_2 - 2z_3 + 0 = -\frac{1}{16},$$

أو

$$\begin{aligned} -2z_1 + \tfrac{11}{10}z_2 \qquad &= -\tfrac{1}{16}; \\ \tfrac{11}{12}z_1 - 2z_2 + \tfrac{13}{12}z_3 &= -\tfrac{1}{16}; \\ \tfrac{13}{14}z_2 - 2z_3 &= -\tfrac{1}{16}. \end{aligned}$$

حيث جذور هذا النظام هي :

$$z_1 = 0.100; \qquad z_2 = 0.126; \qquad z_3 = 0.090,$$

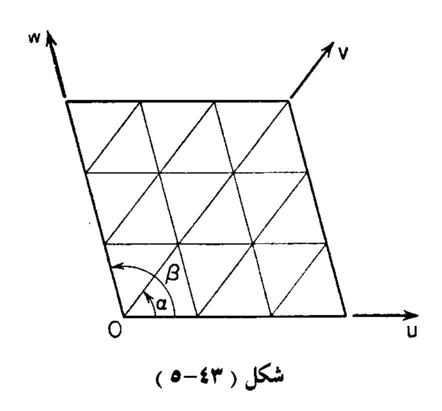
وانحرافات الغشاء المناظرة هي :

$$w_1 = 0.100pa^2/S; \qquad w_2 = 0.126pa^2/S; \qquad w_3 = 0.090pa^2/S.$$

## 5.14 المؤثر اللابلاسي في المحاور الأحداثية المثلثية :

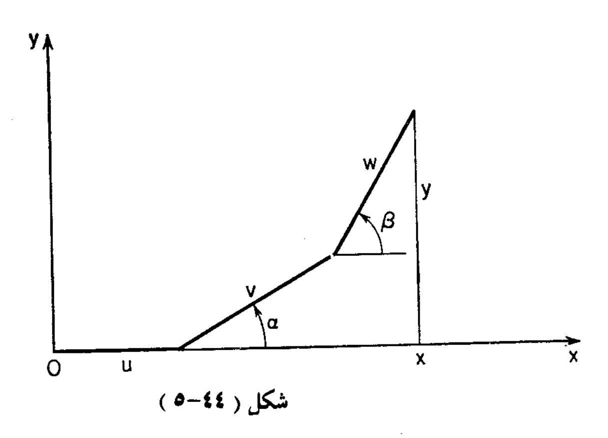
### *The Laplacian Operator in Triangular Coordinates*

ان المشبك اللاديكارتي ( non-Cartesian lattices ) الاكثر شيوعا لتغطية المجالات ذات الاشكال غير المنتظمة هو المشبك المثلثي ( شكل 5.43 ) ، اذ ان اللابلاسي يمكن التعبير عنه بقيم ارتكاز المشبكة المثلثية باستعمال المحاور الاحداثية المثلثية *triangular coordinates* حيث في هذه المحاور تتعين النقطة :




شكل ( ٥-٤٣ )

في المستوى بموجب ثلاثة احداثيات هي $w, v, u$ ( شكل 5.44 ) وحيث يحتفظ بنسبة ثابتة $v/u, w/u,$ او $w/v$ بعين الاحداثيات الثلاثة فان اثنين منها هي اساسية




شكل ( ٥-٤٤ )

افرض ان اتجاه $u$ يتطابق مع المحور $x$ كما انه افرض ان $\beta,\alpha$ هما الزاويتين بين $u, v$ وبين $u,w$ على التناظر . وعليه يكون التحويل من المحاور الديكارتية الى المحاور المثلثية بموجب القاعدتين التاليتين :

$$x = u + v \cos \alpha + w \cos \beta;$$
$$y = v \sin \alpha + w \sin \beta. \qquad (5.14.1)$$

كما ان مشتقات $y , x$ الجزئية بالنسبة الى $w, v, u$ تكون كالاتي :

$$x_u = 1; \quad x_v = \cos \alpha; \quad x_w = \cos \beta;$$
$$y_u = 0; \quad y_v = \sin \alpha; \quad y_w = \sin \beta. \qquad \text{(a)}$$

كذلك ان الدالة $(x,y)$ يمكن اعتبارها دالة الى المتغيرات $w, v, u$ من خلال الدوال المتوسطة ( $x, y$ ) المعرفة بموجب المعادلات ( 5.14.1 ) اما مشتقاتها فيمكن الحصول عليها بموجب قاعدة تفاضل الدوال المركبة . وهكذا بموجب المعادلات (a) يحصل :

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x;$$
$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha;$$
$$z_w = z_x x_w + z_y y_w = z_x \cos \beta + z_y \sin \beta$$

وبتربيع هذه المؤثرات ينتج :

$$z_{uu} = z_{xx}; \qquad \text{(b)}$$
$$z_{vv} = z_{xx} \cos^2 \alpha + 2z_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + z_{yy} \sin^2 \alpha; \qquad \text{(c)}$$
$$z_{ww} = z_{xx} \cos^2 \beta + 2z_{xy} \sin \beta \cos \beta + z_{yy} \sin^2 \beta. \qquad \text{(d)}$$

وبتعويض المعادلة ( b ) في المعادلات ( c ) ، ( d ) ثم بحذف $z_{xy}$ بين المعادلتين الاخيرتين عندئذ تصبح $z_{yy}$ على الصورة التالية :

$$z_{yy} = \frac{z_{uu}\, 2 \cos \alpha \cos \beta \sin (\beta - \alpha) - z_{vv} \sin 2\beta + z_{ww} \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin (\beta - \alpha)},$$

وعليه وبموجب المعادلة ( b ) يحصل :

$$\nabla^2 z = z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{yy}$$
$$= \frac{z_{uu}\sin 2(\beta-\alpha) - z_{vv}\sin 2\beta + z_{ww}\sin 2\alpha}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}. \qquad (5.14.2)$$

وللشبكة المثلثية المتساوية الاضلاع والشائعة الاستعمال

حيث

$$\alpha = 60°; \qquad \beta = 120°; \qquad \beta-\alpha = 60°;$$

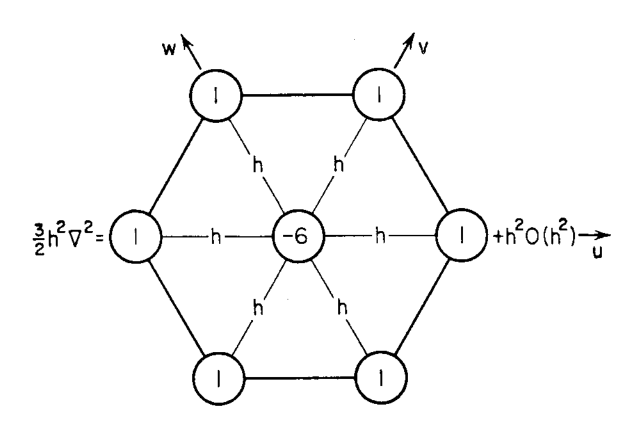
$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin(\beta-\alpha) = \sin 2\alpha = \sin 2(\beta-\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

تؤول المعادلة ( 5.14.2 ) الى

$$\nabla^2 z = \tfrac{2}{3}(z_{uu} + z_{vv} + z_{ww}). \qquad (5.14.3)$$

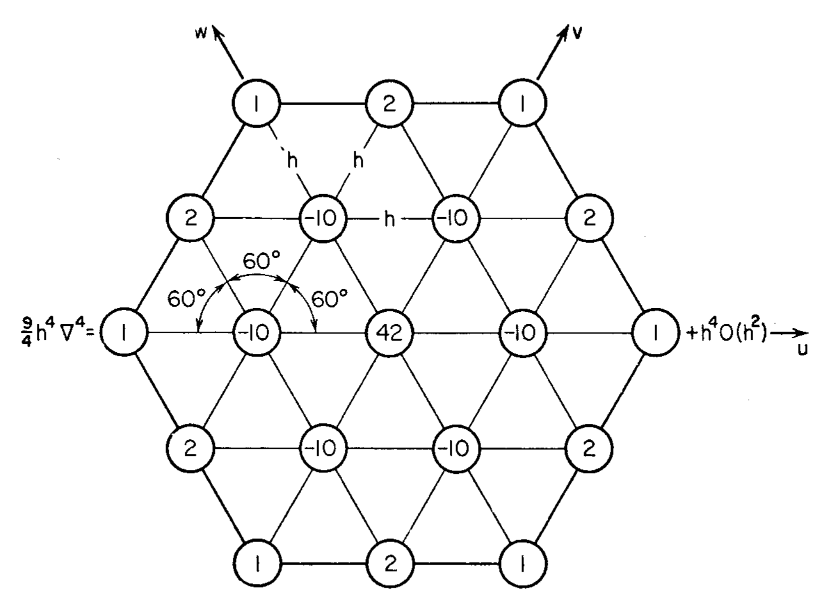
ويظهر مؤثر الفرق $\nabla^2$ المناظر في المحاور الاحداثية المثلثية ذات الاضلاع المتساوية ( اوسدسي ) المقتنى بموجب المؤثر $h^2D^2$ في شكل 2.8a مطبقا على الاتجاهات $w, u-, v-$ في الشكل 5.45 وبتربيع مؤثر شكل 5.45 نحصل على المؤثر $\nabla^4$ في المحاور الاحداثية المثلثية ذات الاضلاع المتساوية المعطاة في الشكل 5.46




$\nabla^2$ شكل ( ٤٥-٥ )

فمثلا مؤثر شكل 5.45 يمكن استعماله في تعيين قيم الدالة التوافقية $z$ الواردة قيمها تقع الحدود المسدسية في الشكل 5.47 ان الدالة التوافقية تحقق ، بالتعريف معادلة لابلاس

$$\nabla^2 z = 0$$




شكل ( ٦-٤٦ ) $\nabla^4$ في المحاور الاحداثية ذات الأضلاع المتساوية

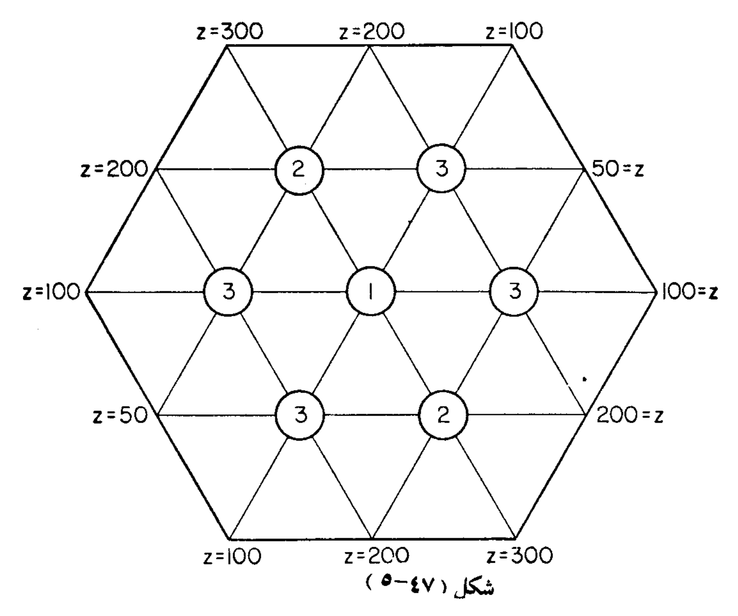
ولذلك فان قيم $z$ عند نقاط الارتكاز في المجال المسدسي تحقق مجمــوعة المعــادلات

| | | | |
|---|---|---|---|
| at | (1) | $2z_2 + 4z_3 - 6z_1 = 0;$ | في |
| at | (2) | $z_1 + 2z_3 - 6z_2 + 200 + 200 + 300 = 0;$ | في |
| at | (3) | $z_1 + z_2 + z_3 - 6z_3 + 50 + 100 + 200 = 0,$ | في |

ots are التي جذورها

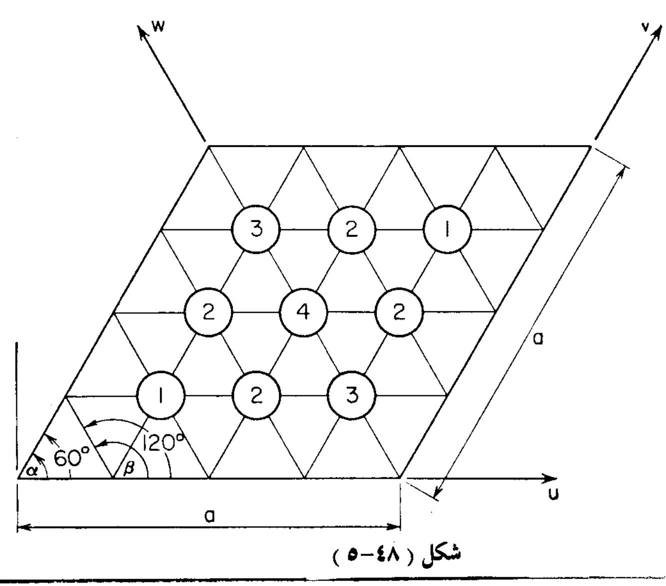
$$z_1 = 156; \quad z_2 = 189; \quad z_3 = 139.$$

ان $z$ يمكن تفسيرها وكأنها قيم درجة الحرارة داخل صفيحة مسدسة والتي حدودها قد احتفظ بها في درجات حرارة شكل 5.47 اوانها احداثيات غشاء لاضغط له مثل الشكل 5.47 احداثياته الرأسية عند الحدود مدونة.




شكل (٥-٤٧)

ان الصفيحة المائلة التي وردت في البند 5.12 بزاوية ميل skew $30° =$ angle of ($\alpha = 60°$) يمكن تغطيتها ايضا بشبكة مثلثة متساوية الاضلاع فاذا كانت $n = 4$ مثلا فانه يجب استخدام مؤثر الشكل 5.45 عند النقاط الاربع من الشكل (5.48) لكي تحل معادلتا بواسان (e) البند 5.12 ان حل الانظمة المناظرة* يعطينا انحراف المركز central deflection




شكل (٥-٤٨)

(*) هامش ص 248

$$w_0\Big]_4 = 0.00283\,\frac{qa^4}{D},$$

بينما نجد ان الانحرافات الناتجة من جعل $n = 10, n = 8$ هي على التوالي :

$$w_0\Big]_8 = 0.00262\,\frac{qa^4}{D}; \qquad w_0\Big]_{10} = 0.00260\,\frac{qa^4}{D}.$$

كما ان قيم الانحرافات المستوفاة هي :

$$w_0\Big]_{4,8} = 0.00255\,\frac{qa^4}{D}; \qquad w_0\Big]_{8,10} = 0.00256\,\frac{qa^4}{D};$$

$$w_0\Big]_{4,8,10} = 0.00256\,\frac{qa^4}{D}.$$

وبفرض ان المعامل 0.00256 هو الصحيح نجد انه من المفيد ان نلاحظ انه تم الحصول عليه من حل ست عشرة معادلة آنية على الاقل بينما نجد ان القيمة الناتجة بموجب المحاور المائلة وباستعمال نقطتين . ثم اربع نقاط ارتكاز والاستيفاء . (0.00248) تختلف بمقدار ثلاثة في المائة فقط عنها .

ان هذه النتائج لتدل على وجوب تغطية كل مجال بشبكة نقاط الارتكاز الاكثر تكيفا لحل المسألة كي نضمن الحصول على نتائج ذات كفاءة عددية عالية.

## 5.15 مؤثر بواسان المحسن في المحاور الأحداثية المثلثية :

***An Improved Poiss‹›ian Operator in Triangular Coordinates***

بالامكان الحصول على حل محسن لمعادلة بواسان في المحاور الاحداثية المثلثية بطريقة مشابهة لتلك التي استعملت في البند 5.11

لنأخذ مجموع ثلاثة من الفروق الثانية في الاتجاهات $u$-, $v$-, $w$ للدالة $z(x,y)$ كما نأخذ اول حدين من مفكوك مشتقاتها :

$$(\delta_u^2 + \delta_v^2 + \delta_w^2)z \doteq h^2(z_{uu} + z_{vv} + z_{ww}) + \frac{h^4}{12}\,(z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww}), \quad \text{(a)}$$

التي بموجب المعادلة ( 5.14.3 ) تصبح :

$$(\delta_u^2 + \delta_v^2 + \delta_w^2)z \doteq \frac{3}{2}\,h^2\nabla^2 z + \frac{h^4}{12}\,(z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww}). \qquad \text{(b)}$$

وتربيع مؤثر المعادلة (5.14.3)

$$\nabla^4 z = \nabla^2(\nabla^2 z) = \tfrac{4}{9}[z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww} + 2z_{uuvv} + 2z_{vvww} + 2z_{wwuu}],$$

يصبح مجموع المشتقات الرابعة غير المختلطة :

$$z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww} = \tfrac{9}{4}\nabla^4 z - 2(z_{uuvv} + z_{vvww} + z_{wwuu}). \qquad \text{(c)}$$

$$\alpha = 60^\circ; \qquad \beta = 120^\circ; \qquad \alpha + \beta = 180^\circ;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}; \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos\beta = -\frac{1}{2}; \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{(d)}$$

كذلك فان المشتقات المختلطة mixed يمكن الحصول عليها بدلالة المشتقات بالاتجاهين $x$ ، $y$ كالاتي :

$$z_u = z_x; \qquad z_v = \frac{1}{2}z_x + \frac{\sqrt{3}}{2}z_y; \qquad z_w = -\frac{1}{2}z_x + \frac{\sqrt{3}}{2}z_y;$$

$$z_{uv} = \frac{1}{2}z_{xx} + \frac{\sqrt{3}}{2}z_{xy}; \qquad z_{vw} = -\frac{1}{4}z_{xx} + \frac{3}{4}z_{yy};$$

$$z_{wu} = -\frac{1}{2}z_{xx} + \frac{\sqrt{3}}{2}z_{xy};$$

$$z_{uuvv} = \frac{1}{4}z_{xxxx} + \frac{\sqrt{3}}{2}z_{xxxy} + \frac{3}{4}z_{xxyy};$$

$$z_{vvww} = \frac{1}{16}z_{xxxx} - \frac{3}{8}z_{xxyy} + \frac{9}{16}z_{yyyy};$$

$$z_{wwuu} = \frac{1}{4}z_{xxxx} - \frac{\sqrt{3}}{2}z_{xxxy} + \frac{3}{4}z_{xxyy}.$$

ويصبح مجموعها

$$z_{uuvv} + z_{vvww} + z_{wwuu} = \tfrac{9}{16}(z_{xxxx} + 2z_{xxyy} + z_{yyyy}) = \tfrac{9}{16}\nabla^4 z,$$

وبموجب المعادلة ( c ) تؤول الى

$$z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww} = \tfrac{9}{4}\nabla^4 z - 2\tfrac{9}{16}\nabla^4 z = \tfrac{9}{8}\nabla^4 z. \qquad \text{(e)}$$

وبالتعويض عن المعادلة ( e ) في المعادلة ( b ) نحصل على

$$\tfrac{3}{2}h^2\nabla^2 z \doteq (\delta_u^2 + \delta_v^2 + \delta_w^2)z - \tfrac{3}{32}h^4\nabla^4 z \qquad (5.15.1)$$

ان معادلة بواسان الواجب حلها :

$$\nabla^2 z = f, \qquad (5.15.2)$$

تعطينا المعادلتين :

$$h^2\nabla^2 z = h^2 f; \qquad \nabla^4 z = \nabla^2 f, \qquad (f)$$

حيث تصبح المعادلة الاولى بموجب المعادلة (5.15.1)

$$(\delta_u^2 + \delta_v^2 + \delta_w^2)z = \tfrac{3}{2}h^2 f + \tfrac{3}{32}h^4\nabla^2 f. \qquad (5.15.3)$$

ان لمعادلة الفرق البواسانية المحسنة هذه خطأ من المرتبة $h^4$ وتحتوي على نفس نقاط ارتكاز مؤثر الشكل 5.45 . ويعتبر هذا التحسين . لذلك تعميماً لاسلوب نوميروف Noumerov .

ولاجل تقييم تأثير الصحيح $\tfrac{3}{32}h^4\nabla^2 f$ في المعادلة( 5.15.3 ) نأخذ الصفيحة المسدسة الشكل المسندة بساطة والتي طول ضلعها $a$ وهي تحت تأثير ثقل منتظم $q$ . وتحقق المعادلتين ( e )و( f ) من البند 5.12 فاذا جعلنا $a = h$ وسمينا $w_0, M_0$ للعزم والانحراف عند مركز الصفيحة نحصل بدون التصحيح على

$$\begin{aligned} -6M_0 &= \frac{3}{2}a^2(-q); & M_0 &= 0.250qa^2; \\ -6w_0 &= \frac{3}{2}a^2\left(-\frac{M_0}{D}\right); & w_0\Big]_1 &= 0.0625\,\frac{qa^4}{D}. \end{aligned} \qquad (g)$$

وبالمثل اذا كانت $h = a/2$ واعتبرنا $w_1, M_1$ العزم والانحراف عند نقاط الارتكاز الستة التي تقع حول المركز نحصل بدون تصحيح على :

$$-4M_1 + M_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2(-q); \qquad 6M_1 - 6M_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2(-q),$$

والتي منها

$$M_0 = 0.208qa^2; \qquad M_1 = 0.146qa^2,$$

ولذلك يكون

$$-4w_1 + w_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(-0.146\,\frac{qa^2}{D}\right);$$
$$6w_1 - 6w_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(-0.208\,\frac{qa^2}{D}\right),$$

والتي منها ينتج :

$$w_0\Big]_2 = 0.0356\,\frac{qa^4}{D}. \qquad \text{(h)}$$

ان استيفاء $h^2$ بين (g) و (h) يعطينا :

$$w_0\Big]_{1,2} = 0.0266\,\frac{qa^4}{D}. \qquad \text{(i)}$$

وعند استعمال التصحيح مع $h = a$ نحصل على

for $f_0 = -q$ عندما $\nabla^2 f_0 = 0; \qquad M_0 = 0.250qa^2;$

for $f_0 = -\dfrac{M_0}{D}$ عندما $\nabla^2 f_0 = \dfrac{2}{3a^2}(-6)\left(-0.250\,\dfrac{qa^2}{D}\right) = \dfrac{q}{D};$

$$-6w_0' = \frac{3}{2}a^2\left(-0.250\,\frac{qa^2}{D}\right) + \frac{3}{32}a^4\left(\frac{q}{D}\right) \quad \therefore \quad w_0'\Big]_1 = 0.0469\,\frac{qa^4}{D}. \qquad \text{(j)}$$

بالمثل عندما يكون $n = a/2,$

$$M_0 = 0.208qa^2; \qquad M_1 = 0.146qa^2;$$

$$\nabla^2 f_0 = \frac{q}{D}; \qquad \nabla^2 f_1 = \frac{q}{D};$$

$$w_0'\Big]_2 = 0.0323\,\frac{qa^4}{D}. \qquad \text{(k)}$$

ان استيفاء $h^4$ بين (j) و (k) يعطي :

$$w_0' \Big]_{1,2} = 0.313 \frac{qa^4}{D}.$$

ان الفرق بين $w_0$ ، $w_0'$ هو 33 بالمائة عندما $h = a$ وهو عشرة بالمائة عندما $h = a/2$ كما ان الفرق بين القيمتين المستوفاة extrapolated هو خمسة عشر بالمائة .

## 5.16 مسائل سريان الحرارة العارض ( المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة )

***Transient Heat-flow Problems (Parabolic Partial Differential Equations)***

### المسألة الزمنية – الفضائية الاحادية البعد : سريان الحرارة فـي قضيب

[a] ONE-DIMENSIONAL SPACE TIME PROBLEM: HEAT FLOW IN A BAR

سخن قضيب ذو مقطع ثابت طوله $L$ . وسطحه الجانبي معزول الى درجة حرارة $u_0$ ثم برد بعزل طرف القضيب في $x = 0$ وحفظ الطرف عند $x = L$ في درجة حرارة قدرها $a$ درجة . يطلب تحديد تغير درجة الحرارة مع الزمن لجميع نقاط القضيب أي لكافة $0 < x < L$

ان المعادلة التفاضلية التي تتحقق بدرجة الحرارة $u(x,t)$ عند نقطة ما مثل $x$ من القضيب في وقت $t$ . هي على الشاكلة التالية :

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}; \qquad \begin{matrix} 0 < x < L \\ t > 0 \end{matrix} \qquad (5.16.1)$$

حيث $K$ هو ثابت الانتشارية الحرارية في القضيب ( thermal diffusivity of the bar

$$K = \frac{k'}{c\delta}, \qquad (5.16.2)$$

علما بان $k'$ هي التوصيل الحراري thermal conductivity وإن $c$ هي الحرارة النوعية وإن $\delta$ كثافة الكتلة (لكل وحدة من وحدات الحجوم )القضيب . وفضلا عن ذلك فان درجة الحرارة يجب ان تحقق الشروط الحدودية التالية :

$$u_x(0,t) = 0; \qquad (5.16.4)$$

$$u(L,t) = a, \qquad (5.16.3)$$

(*) انظر مثلا المعادلات التفاضلية بند 11.6

والشرط الاولي :

$$u(x,0) = u_0. \qquad (5.16.5)$$

المعادلات (5.16.1), (5.16.3) الى (5.16.5) تؤلف مسألة قيم حدية زمنية فضائية احادية البعد . وتتسم هذه المسألة بأنها من طراز خاص من القيم الحدية للمتغير الفضائي ومن طراز القيم الاولية لمتغير الزمن .

ومن المناسب ان يعالج مثل هذه المسألة بصيغة لابعدية nondimensional form باستعمال التحويل التالي :

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \qquad \bar{t} = \frac{Kt}{L^2}; \qquad \bar{u} = \frac{u - a}{u_0 - a}, \qquad (5.16.6)$$

وبعد اسقاط ( الخطوط ) في المتغيرات تصبح مسالة القيم الحدودية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}; \qquad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ t > 0 \end{matrix} \qquad (5.16.7)$$

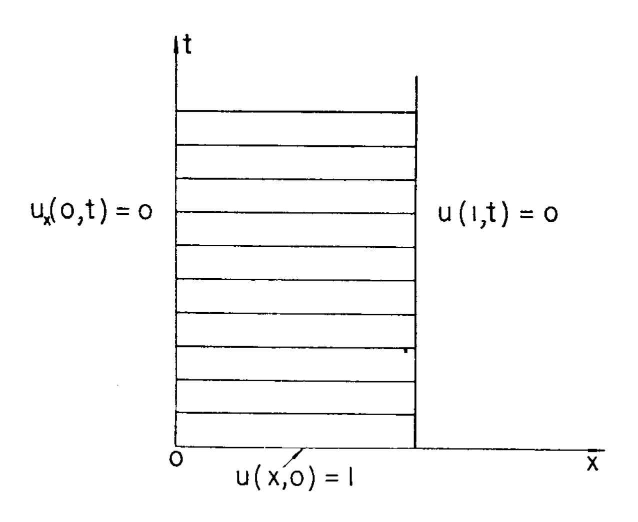
$$u_x(0,t) = 0;$$
$$u(1,t) = 0; \qquad (5.16.8)$$
$$u(x,0) = 1.$$

ومن الافضل ان يناقش تكامل هذا النمط من المسائل باعتبار الحل كائنا في المستوى الزمني الفضائي المكون من المتغيرين المستقلين $x$ ، $t$

لنأخذ شريحة لانهائية كما في شكل 5.49 والمعّرفة بالحدود $0 < x < 1, t > 0$ كما نأخذ أيضا وبقيم الدالة المعرفه عند الحدود بالشروط الحدودية الواردة في المعادلات (5.16.8) .

تصبح المسألة واحدة ينشر فيها الحل . انطلاقا من القيمة 1 عند $t = 0$ ومن القيم الحدية عند الحدود $x = 1, x = 0$ تنتشر باتجاه الاحداثي $t$ عند جميع النقاط $x$ في المستوى $x,t$ .

وبتذبذب باتجاه المحور في جميع النقط في المستوى $x,t$ ولذلك تصبح المسألة عبارة عن تعيين انتشار حل مفتوح النهاية "open-ended" solution في المستوى على عكس حل معادلة ناقصة elliptic التي هي معرفة في مجال مغلق . ان الفروق مناسبة في حل هذا النمط من المسائل لنأخذ شبكة مستطيلة الشكل في المستوى $x,t$ حيث تعرف الكمية $u_{ij}$ على أنها درجة الحرارة في النقطة $x = x_i$ في الوقت $t = t_j$




شكل (٤٩ – ٥)

لنجعل من اصل الشبكة $\Delta x = h$ في الفضاء $\Delta t = k$ وبالنسبة الى الزمن (شكل 5.50 ) باستعمال مؤثر الفرق المركزي من المرتبة $h^2$ في احداثي الفضاء وباستعمال مؤثر الفرق الامامي الاول $[e = 0(k)]$ في احداثي الزمن .

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}; \qquad (5.16.9)$$

$$u_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, \qquad (5.16.10)$$

تصبح المعادلة (5.16.7) معادلة الفرق التالية :

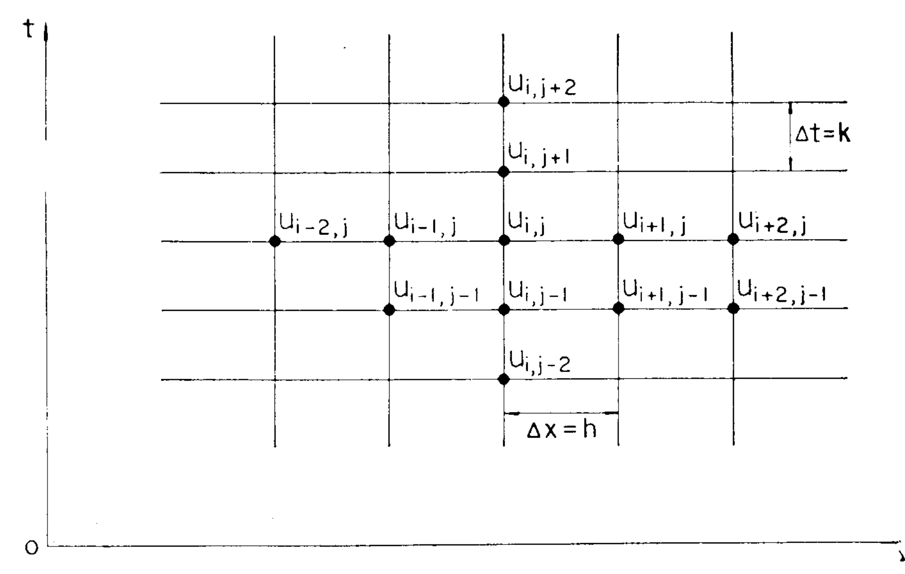
$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = \frac{1}{\alpha}[u_{i,j+1} - u_{i,j}], \qquad (5.16.11)$$

$$\alpha = \frac{k}{h^2}. \qquad \text{حيث...} \qquad (5.16.12)$$

نشتق معادلة المواترة التي تسمح بتعيين درجة الحرارة عند النقطة $x = x_i$ في الزمن $t = t_{j+1}$ من المعادلة (5.16.11) وذلك بحلها بالنسبة الى الكمية $u_{i,j+1}$

$$u_{i,j+1} = \alpha u_{i+1,j} + (1 - 2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i-1,j} \qquad (5.16.13)$$

ان المعادلة (5.16.13) تسمح بايجاد قيمة $u_{i,j+1}$ بدلالة درجات الحرارة عند النقاط $x_i, x_{i+1}, x_{i-1}$ في الزمن $t_j$




شبكة الفرق المحدودة Finite difference grid. **شكل (٥-٥٠)**

وفي الحالة الخاصة عندما $\alpha = \frac{1}{2}$ فان درجة الحرارة $u_{i,j}$ لايحتاج اليها استخراج قيمة $u_{i,j+1}$ ونبسط معادلة المواترة recurrence equation الى :

$$u_{i,j+1} = \tfrac{1}{2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j}]. \qquad (5.16.14)$$

المعادلة (5.16.14) يتبين ان درجة الحرارة $u_{i,j+1}$ في الزمن $t_{j+1}$ يمكن ايجاد قيمتها بتوسيط averaging درجات الحرارة عند النقاط المحيطة $x_{i-1}$ ، $x_{i+1}$ في الزمن السابق $t_j$.

لنفرض ان القضيب في مثالنا الحاضر مغطى بشبكة في المستوى الزمني الفضائي بحيث ان

$$\alpha = \tfrac{1}{2}; \qquad k = \tfrac{1}{8}; \qquad h = \tfrac{1}{2}. \qquad (5.16.15)$$

ان الشكل (5.51) يوضح تمديد الحل في المستوى $x,t$
ان شروط الحدود المعزولة عند $x = 0$ يتطلب ان تتلاشى $u_x$ هناك أي :

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0 \quad \text{at} \quad i = 0, \qquad (5.16.16)$$

ومن هذه فان صيغة التمديد prolongation formula تكون :

$$u_{+1,j} = u_{-1,j}. \qquad (5.16.17)$$

ان الشروط الحدودية تكون درجة الحرارة صفرا ادخلت عند الحدود $x = 1$ والقيمة الاولية لدرجة الحرارة $u(x,0) = 1$ ادخلت في النقاط $x = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$

ان عدم الاتصال discontinuity في النقطة(1,0) من المستوى $x,t$ والواقعة بين القيمة الحدودية $u=0$ أو بين القيمة الاولية $u=1$ . جعلت اختياريا مساوية متوسط درجة الحرارة $\frac{1}{2}$ .

| t | $x=-\frac{1}{2}$ (i−1) | x = 0 (i) | $x=\frac{1}{2}$ (i+1) | x = 1 (i+2) |
|---|---|---|---|---|
| t=7/8 | 3/32 | 1/8 | 3/32 | 0 |
| t=3/4 | 1/8 | 3/16 | 1/8 | 0 |
| t=5/8 | 3/16 | 1/4 | 3/16 | 0 |
| t=1/2 | 1/4 | 3/8 | 1/4 | 0 |
| t=3/8 (j+3) | 3/8 | 1/2 | 3/8 | 0 |
| t=1/4 (j+2) | 1/2 | 3/4 | 1/2 | 0 |
| t=1/8 (j+1) | 3/4 | 1 | 3/4 | 0 |
| t = 0 (j) | 1 | u=1 | 1 | 1/2 |

**Fig. 5.51.** $u_{i,j}$ for $\alpha = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{8}$.

النتائج مبينة في الشكل (5.51) لغاية الزمن $t=\frac{7}{8}$ .كما ان نتائج مماثلة اقتنيت باستعمال شبكة اكثر دقة مع الاحتفاظ تكون $\alpha = \frac{1}{2}$ أي

$$\underline{\alpha = \tfrac{1}{2}}; \qquad h = \tfrac{1}{4}; \qquad k = \tfrac{1}{32}, \tag{5.16.18}$$

موضحة في الشكل 5.52

ومن المهم ملاحظة انه بالامكان استعمال استيفاء $h^2$ في مثل هذه المسالة. ولنسبة $\alpha=k/h^2$ ثابتة فان خطوة الزمن $k$ متناسبة مع $h^2$ ولذلك فان الخطأ $0(k)$ يكون $0(h^2)$ . وعليه يمكن استعمال استيفاء $h^2$ في أية نقطة $x=x_i$ في المستوى الزمني الفضائي التي عندها تعرف درجة الحرارة من خلال تقريبين مختلفتين يناظران $\alpha$ نفسها لحساب النتائج .

ان شرط كون التقريبات المتتالية للدالة المعنية تتزايد أوتتناقص برتابة monotonically لايزال سارياً .

| t | x = -1/4 | x = 0 | x = 1/4 | x = 1/2 | x = 3/4 | x = 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| t = 1/2 | .3404 | .3693 | .3404 | .2611 | .1410 | 0 |
| 15/32 | .3693 | .3988 | .3693 | .2819 | .1530 | 0 |
| 7/16 | .3988 | .4326 | .3988 | .3059 | .1650 | 0 |
| 13/32 | .4326 | .4668 | .4326 | .3301 | .1792 | 0 |
| 3/8 | .4668 | .5068 | .4668 | .3584 | .1934 | 0 |
| 11/32 | .5068 | .5469 | .5068 | .3867 | .2099 | 0 |
| 5/16 | .5469 | .5938 | .5469 | .4199 | .2266 | 0 |
| 9/32 | .5938 | .6406 | .5938 | .4531 | .2461 | 0 |
| 1/4 | .6406 | .6953 | .6406 | .4922 | .2656 | 0 |
| 7/32 | .6953 | .7500 | .6953 | .5313 | 2891 | 0 |
| 3/16 | .7500 | .8125 | .7500 | .5781 | .3125 | 0 |
| 5/32 | .8125 | .8750 | .8125 | .6250 | .3438 | 0 |
| 1/8 | .8750 | .9375 | .8750 | .6875 | .3750 | 0 |
| 3/32 | .9375 | 1.000 | .9375 | .7500 | .4375 | 0 |
| 1/16 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | .8750 | .5000 | 0 |
| 1/32 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | .7500 | 0 |
| t = 0 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1/2 |

**Fig. 5.52.** $u_{i,j}$ for $\alpha = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{32}$.

**شكل ( ٥٢-٥ )**

كمثال على استعمال استيفاء $h^2$-extrapolation نأخذ درجة الحرارة عند النقطة $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ في المستوى الزمني الفضائي .

اذ من الشكلين 5.51, 5.52, نجد ان :

$$\underline{\alpha = \tfrac{1}{2}}; \quad h = \tfrac{1}{2}; \quad u_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = 0.2500;$$

$$\underline{\alpha = \tfrac{1}{2}}; \quad h = \tfrac{1}{4}; \quad u_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = 0.2611.$$

باستعمال المعاملات اللازمة لاستيفاء-$h^2$ الواردة في الجدول 2.12 . نجد ان درجة الحرارة المستوفاة تتعين بما يأتي :

$$u_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4})}\Big|_{2.4} = 1.3333(0.2611) - 0.3333(0.2500) = 0.2648.$$

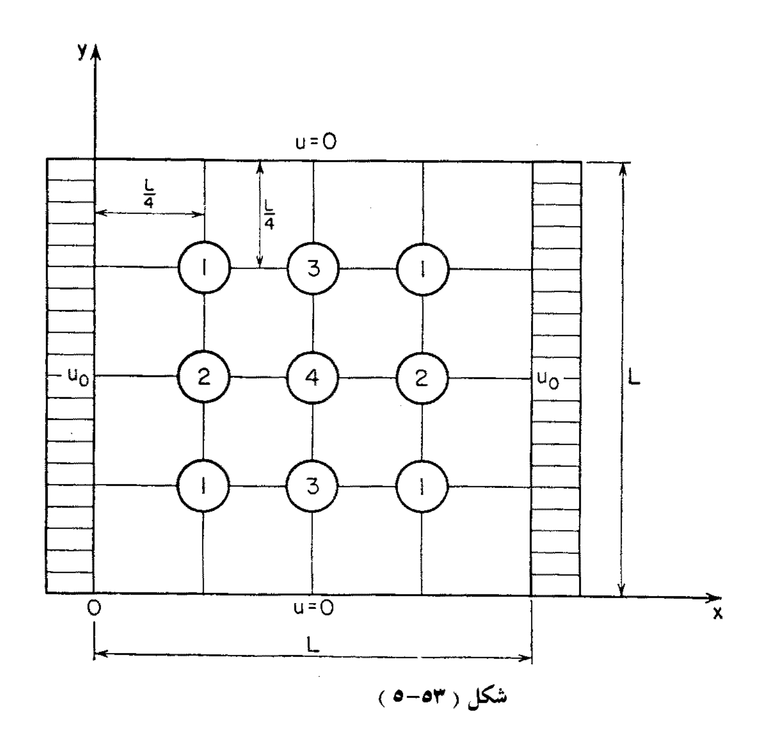
ان السؤال البالغ الاهمية عن استقرار الحل العددي لمسائل الانتشار propagation الناتجة من المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة parabolic سوف نتناوله في البند 5.17 وسيجد القارىء في ذلك البند اسلوباً لتتعين قيم $\alpha$ التي لايتباعد الحل العددي باستعمالهما .

## [b] المسألة الزمنية – الفضائية الأحادية البعد :

TWO-DIMENSIONAL SPACE–TIME PROBLEM:

### سريان الحرارة في صفيحة HEAT FLOW IN A PLATE

صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها $L$ . درجة حرارتها في البداية صفر . رفعت درجة حرارة ضلعين متقابلين بينهما فجأة الى $u_0$ بينما احتفظ بدرجة حرارة الضلعين الاخرين عند الصفر (شكل 5.53 ) والمطلوب تعيين تغير درجة الحرارة مع الزمن لنقاط تقع داخل الصفيحة




شكل ( ٥٣-٥ )

المعادلة التفاضلية التي تحقق بدرجة الحرارة $u(x,y,t)$ في نقطة ما $x,y$ في الصفيحة في الزمن $t$ هي المعادلة الثنائية البعد المرادفة للمعادلة (5.16.1) وهي على الصورة التالية

$$K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (5.16.19)$$

وفضلا عن ذلك فان درجة الحرارة يجب ان تحقق الشروط الحدودية التالية :

$$u(0,y,t)=u(L,y,t)=u_0; \qquad u(x,0,t)=u(x,L,t)=0, \qquad (5.16.20)$$

والشرط الاول التالي :

$$u(x,y,0)=0. \qquad (5.16.21)$$

ان المسألة التي نحن بصددها ممكنة الحل باستعمال الفروق المحدودة finite differences وبطريقة مماثلة للطريقة التي استعملت في حل المسألة الزمنية الوحيدة البعد والتي وردت في هذا البند من قبل باتباع اقتراح من Bender Schmidt تغطي الصفيحة المربعة بشبكة مربعة ذات بعد $h=L/n$ وفترة زمنية قدرها $\Delta t=k$ ( شكل 5.53 ) وباستعمال الرمز $u_{i,j}$ درجة الحرارة عند النقطة $i$ في الزمن $t=t_j$ وباستعمال مؤثر الفرق المركزي للشكل 5.3b بدلا عن $\nabla^2 u$ ومؤثر الفرق الامامي من الشكل ( 2.5a ) بدلا من المشتقة $\partial u/\partial t$ تصبح المعادلة (5.16.19) على الصورة التالية :

$$u_{a,j}+u_{b,j}+u_{r,j}+u_{l,j}-4u_{i,j}=\frac{1}{\alpha}\left(u_{i,j+1}-u_{i,j}\right), \qquad (5.16.22)$$

علما بان :

$$\alpha=\frac{Kk}{h^2}. \qquad (5.16.23)$$

تشتق معادلة المواترة التي تسمح بتعيين درجة الحرارة في النقطة $i$ في الزمن $t_{j+1}$ من المعادلة ( 5.16.22 ) ولذلك لحلها بالنسبة الى $u_{i,j+1}$ :

$$u_{i,j+1}=\alpha(u_{a,j}+u_{b,j}+u_{r,j}+u_{l,j})+(1-4\alpha)u_{i,j}. \qquad (5.16.24)$$

وعلى غرار مافعلناه في حالة البعد الواحد . يمكن تحقيق قدرا كبيرا من التبسيط باختيار قيمة $k$ بحيث تكون $\alpha=Kk/h^2=\frac{1}{4}$* بمعنى ان :

$$k=\frac{h^2}{4K}; \qquad \alpha=\frac{1}{4}. \qquad (5.16.25)$$

(*) هامش ص 258

وفي هذه الحال تؤول المعادلة (5.16.24) الى الصيغة التالية : —

$$u_{i,j+1} = \tfrac{1}{4}(u_{a,j} + u_{b,j} + u_{r,j} + u_{l,j}). \qquad (5.16.26)$$

ان درجة الحرارة عند النقطة $i$ في الزمن $t_{j+1}$ تصبح عبارة عن متوسط درجات الحرارة في نقاط الارتكاز الاربعة المجاورة في الزمن السابق $t_j$ . وكما هو مبين بالمعادلة ( 5.16.25 ) لتحسين تعيين قيم درجة الحرارة مع الزمن . الذي يتطلب تصغير قيمة $k$ . يستلزم تصغيرا في قيمة $h$ وعليه حصول زيادة في عدد نقاط الارتكاز . بحيث يتطلب الحصول على درجات حرارة دقيقة لقيم صغيرة من $t$ مشبكا دقيقا .

الصفيحة المربعة في المثال الحالي غطيت بشبكة حجم عينها $L/4$ وعليه فان قيمة الفترة الزمنية $k$ تكون :

ان درجة الحرارة عند الاضلاع المتقابلة $x = 0, x = L$ قد فرضت مسامية 10,000

② $x = L/4$, $y = L/2$

| $n = t/k$ | $u$ | 6250 | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 6242 | 19 |
| 1 | 2500 | 6240 | 18 |
| 2 | 3750 | 6235 | 17 |
| 3 | 4375 | 6230 | 16 |
| 4 | 5000 | 6220 | 15 |
| 5 | 5312 | 6210 | 14 |
| 6 | 5625 | 6191 | 13 |
| 7 | 5781 | 6171 | 12 |
| 8 | 5937 | 6132 | 11 |
| 9 | 6015 | 6093 | 10 |
| | | | $n = t/k$ |

④ $x = L/2$, $y = L/2$

| $n = t/k$ | $u$ | 5000 | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4990 | 19 |
| 1 | 0 | 4985 | 18 |
| 2 | 1250 | 4980 | 17 |
| 3 | 2500 | 4970 | 16 |
| 4 | 3125 | 4960 | 15 |
| 5 | 3750 | 4941 | 14 |
| 6 | 4062 | 4921 | 13 |
| 7 | 4375 | 4882 | 12 |
| 8 | 4531 | 4843 | 11 |
| 9 | 4687 | 4765 | 10 |
| | | | $n = t/k$ |

شكل (١٥-٥)

① $x = L/4$, $y = L/4$ — ③ $x = L/2$, $y = L/4$

| $n = t/k$ | $u$ | 5000 | $\infty$ | | $n = t/k$ | $u$ | 3750 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4995 | 19 | | 0 | 0 | 3742 | 19 |
| 1 | 2500 | 4992 | 18 | | 1 | 0 | 3741 | 18 |
| 2 | 3125 | 4990 | 17 | | 2 | 1250 | 3735 | 17 |
| 3 | 3750 | 4985 | 16 | | 3 | 1875 | 3730 | 16 |
| 4 | 4062 | 4980 | 15 | | 4 | 2500 | 3720 | 15 |
| 5 | 4375 | 4970 | 14 | | 5 | 2812 | 3710 | 14 |
| 6 | 4531 | 4960 | 13 | | 6 | 3125 | 3691 | 13 |
| 7 | 4687 | 4941 | 12 | | 7 | 3281 | 3671 | 12 |
| 8 | 4765 | 4921 | 11 | | 8 | 3437 | 3632 | 11 |
| 9 | 4843 | 4882 | 10 | | 9 | 3515 | 3593 | 10 |
| | | | $n = t/k$ | | | | | $n = t/k$ |

ان قيم درجات الحرارة المتتالية عند نقاط الارتكاز المدونة في الجدول ( 5.15 ) وهي تخص بربع الصفيحة جرى حسابها باخذ المعدلات المتتالية وفقا للمعادلة ( 5.16.26 ) مع ملاحظة ان توزيع درجة الحرارة : هوتوزيع متماثل حول كل من $x = L/2$ ، $y = L/2$ وهنا ينبغي العلم بأن قيم درجة الحرارة الواردة في الجدول ( 5.15 ) تقرأ بالتحرك نحو الاسفل لغاية $t = 9k$ ثم الى الاعلى فيما يلي ذلك.ان آخر قيمة من قيم درجة الحرارة التي تناظر $t = \infty$ هي قيمة الحالة المطردة ( steady-state ) حيث جرى حسابها بطريقة الارخاء وباستعمال طرق البند 5.5 .

الجدول يوضح الحقيقة التي فحواها بان التعيين الصحيح لتغيير درجة الحرارة بعد $t = 0$ مباشرة يتطلب استعمال عين mesh بالغة الدقة . اما المسائل بتوصيل الحرارة الزمنية – الفضائية الثلاثي البعد بتوصيل الحرارة الزمنية الفضائية المماثلة فانه يمكن حلها بتمديد الطرق التي استعملت في المثالين السابقين وباستعمال مؤثر ثلاثي – الابعاد اي $\nabla^2 u$ واستعمال مؤثر الفرق الامامي في الزمن . فانه يمكن الحصول على معادلات المواترة recurrence لدرجة الحرارة عند النقطة $i$ في الزمن $t_{j+1}$ ومنها يمكن حساب توزيع درجة الحرارة في الجسم .

## 5.17 استقرار الحل العددي لمعادلة التوصيل الحراري احادية البعد ( المعادلات المكافئة )

***Stability of the Numerical Solution of the One- dimensional Heat Conduction Equation (Parabolic Equations)***

ان استقرار الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية من النوع المكافيء يتقرر بتعيين المدى في قيم النسبة ($\alpha$) التي يكون فيها الحل غيرمتباعد . مثال ذلك في مسألة البند( 5.16a) تبقى عن القيمة النهائية للنسبة $\alpha = k/h^2$ التي تضمحل لها درجة الحرارة في حل الفروق المحدودة في النهاية .

ان مسألة القيم الحدودية تحت الدراسة توضح بصيغة معادلة الفرق على الصورة التالية :

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = \frac{1}{\alpha}[u_{i,j+1} - u_{i,j}]; \qquad (5.17.1)$$

$$u_{-1,j} = u_{1,j};$$

$$u_{N,j} = 0; \qquad (5.17.2)$$

$$u_{i,0} = 1, \qquad (5.17.3)$$

حيث $N = 1/h$ هي عدد التقسيمات بالاتجاه $x$

ولغرض التبسيط تنقل نقطة الاصل للمحور الاحداثي $x$ فتجعلها عند نهاية القضيب ويحتفظ بها في درجة حرارة = صفر.

باستعمال التحويل

$$x' = 1 - x, \qquad (5.17.4)$$

لذا مسألة القيم الحدودية الاصلية تتخذ الصورة التالية :

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = \frac{1}{\alpha}[u_{i,j+1} - u_{i,j}]; \qquad (5.17.5)$$

$$\left.\begin{aligned} u_{0,j} &= 0; \\ u_{N-1,j} &= u_{N+1,j}; \end{aligned}\right\} \qquad (5.17.6)$$

$$u_{i,0} = 1. \qquad (5.17.7)$$

ان معادلة الفرق ( 5.17.5 ) هي معادلة خطية ذات معاملات ثابتة يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات [ انظر مثلا التحليل العددي لكيزروكونز ص 328 مكروهيل او التحليل الهندسي تأليف كراندل ص 380 للناشر نفسه].

بجعل

$$u_{i,j} = X_i T_j \qquad (5.17.8)$$

في المعادلة ( 5.17.5 ) نحصل على المعادلة

$$\alpha \left[ \frac{X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}}{X_i} \right] = \frac{T_{j+1} - T_j}{T_j} = -\lambda, \qquad (5.17.9)$$

حيث $\lambda$ ثابت اختياري . لان كلا من طرفي المعادلة ( 5.17.9 ) دالة فقط لمتغير مستقل واحد هما $t, x$ . ان حل المعادلتين التفاضليتين الاعتياديتين الناتجتين من المعادلة (5.17.9)

$$X_{i+1} - \left[ 2 - \frac{\lambda}{\alpha} \right] X_i + X_{i-1} = 0; \qquad (5.17.10)$$

$$T_{j+1} - (1 - \lambda) T_j = 0, \qquad (5.17.11)$$

قد تم بموجب الطرق التي شرحت في البند 3.13 وهما على التوالي :

$$X_i = C_1 \sin \gamma i + C_2 \cos \gamma i; \qquad (5.17.12)$$

$$T_j = (1 - \lambda)^j, \qquad (5.17.13)$$

$$\cos \gamma = 1 - \frac{\lambda}{2\alpha}. \qquad (5.17.14)$$

وبادخال $X_i , T_j$ في شروط المعادلة ( 5.17.6 ) نحصل على :

$$u_{0,j} = 0 \quad \therefore \quad X_0 = 0; \quad C_2 = 0; \qquad (5.17.15)$$

$$u_{N-1,j} = u_{N+1,j} \quad \therefore \quad X_{N-1} = X_{N+1}$$
$$\therefore \quad \sin (N - 1)\gamma = \sin (N + 1)\gamma. \qquad (5.17.16)$$

ان متطلبات المعادلة ( 5.17.16 ) تتحقق اذا اتخذت $\gamma$ القيم المتقطعة

$$\gamma_n = \frac{2n - 1}{N} \frac{\pi}{2} \quad (1 \leq n \leq N). \qquad (5.17.17)$$

وبحل المعادلة ( 5.17.14 ) للمتغير $\lambda$ وباستعمال المعادلة (5.17.17) نحصل على.

$$(1 - \lambda)^j = \left\{ 1 - 2\alpha \left[ 1 - \cos \frac{(2n - 1)\pi}{2N} \right] \right\}^j. \qquad (5.17.18)$$

ان الحل الاكثر عمومية المحقق لمعادلة الفرق [ المعادلة (5.17.5) ] وللشروط الحدودية لمعادلة (5.17.6) بجمع الحلول الفردية individual solutions $u_{i,j}$ لكل قيمة من قيم $\gamma_n$

$$u_{i,j} = \sum_{n=1}^{N} C_n \left\{1 - 2\alpha\left[1 - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right]\right\}^j \sin\frac{(2n-1)\pi i}{2N}, \quad (5.17.19)$$

حيث يجب تقنين قيم المعاملات $C_n$ من الشرط الاولي للمعادلة (5.17.7) وبملاحظة ان العبارة التالية :

$$G_n = 1 - 2\alpha\left[1 - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right] \qquad (5.17.20)$$

تظهر في كل حد من حدود متسلسلة المعادلة (5.17.19) يتبين ان استقرار الحل يتم السيطرة عليه بقيم الدالة $G_n$ التي هي دائما اقل من ١ حيث نلاحظ بان الحدود من النمط التي تظهر في المعادلة (5.17.20) تلعب نفس الدور في الاسيات السالبة في الزمن $t$ في الحل التحليلي لسريان الحرارة التي تـحل بنقل المتغيرات ، اذا كانت $G_n > 0$ ، فان الحل يضمحل باطراد اما اذا كان الحل الذي تتعاقب فيه الحدود موجبة مرة غير ان المتسلسلات تضمحل في نهاية المطاف مرضياً فان قيمة $G_n$ التي تقل عن 1− فان المتسلسلات سوف تذبذب متزايدة في السعة amplitude وعليه فان قيمة $G_n$ النهاية لغرض الاستقرار هـي 1− ، اذا كانت شروط المسألة الاولية $n$ المناظر الى $G_n$ ، واذا كان اخطاء التـدويـر العشوائيـة random round-off errors في الحل العددي تثير هذا المنوال في الحالات التي قيمة $C_n = 0$ نظريا فان الحل العددي سوف يتباعد لقيم $G_n < -1$

ان القيمة النهائية $G_n$ التي تجعل الحد الذي رتبته $n$ مستقرا يتعين بحل المعادلة (5.17.20) عندما $G_n = -1$

$$\alpha_n = \frac{1}{1 - \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2N}}. \qquad (5.17.21)$$

وللحصول على الاستقرار لجميع قيم $n$ التي تنحصر بين الواحد وبين $N$ فان قيمة $\alpha$

التي استعملت في التكامل العددي يجب ان تكون اصغر من اصغر قيم $n$ ، ولنسمها $N$

$$\alpha_N = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{2N}}. \qquad (5.17.22)$$

وبالمثل لكي نضمن الاضمحلال الثابت للحد رتبته $n$ من الحل فان قيمة $G_n$ النهائية يجب ان تكون صفرا ولذلك يكون

$$\bar{\alpha}_n = \frac{1}{2\left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2N}\right]} \qquad (5.17.23)$$

ولكي نصف الاضمحلال الثابت للحد كله فانه يجب ان تكون اصغر من اصغر قيم $\bar{\alpha}_n$ اي اصغر من $\bar{\alpha}_N$

$$\bar{\alpha}_N = \frac{1}{2\left(1 + \cos \frac{\pi}{2N}\right)} = \tfrac{1}{2}\alpha_N. \qquad (5.17.24)$$

الجدول 5.16 يشتمل على قيم $\alpha_N$ و $\bar{\alpha}_N$ باعتبار كل منهما دالة الى $N$ قيمة ، $\alpha = \frac{1}{2}$ التي استعملت في البند 5.16a وذلك حيث تكون قيمة $N = 2$ وحين $N$ تعطي حلا مستقرا غير انه متذبذب.

جدول ( ١٦-٥ )

| $N$ | $\alpha_N$ | $\bar{\alpha}_N$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.5858 | 0.2929 |
| 3 | 0.5359 | 0.2680 |
| 4 | 0.5198 | 0.2599 |
| 5 | 0.5125 | 0.2563 |
| 6 | 0.5086 | 0.2543 |
| ∞ | 0.5000 | 0.2500 |

ان استقرار مسألة سريان الحرارة في الفضاء الثنائي والثلاثي الابعاد يمكن تجريبه بوسائل مماثلة تماما لما سبق .

## 5.18 مسألة الوتر المهتز ( المعادلات التفاضلية الجزئية الزائدية )

***The Vibrating String Problem (Hyperbolic Partial Differential Equations)***

يمتد وتر مرن قابل للانثناء تماما طوله $L$ بين نقطتين ثابتتين في مستوافقي ( شكل 5.54 ) . وقد اعطي الوتر ازاحة رأسية أولية $y(x,0) = f(x)$ ثم اطلق من حالة السكون في الزمن $t = 0$ مع الاحتفاظ بنهايته ثابتتين . المطلوب تعيين الانحراف $y(x,t)$ لاية نقطة من نقاط الوتر في اي زمن $t = 0$ عندما تكمن ذبذبات الوتر صغيرة.

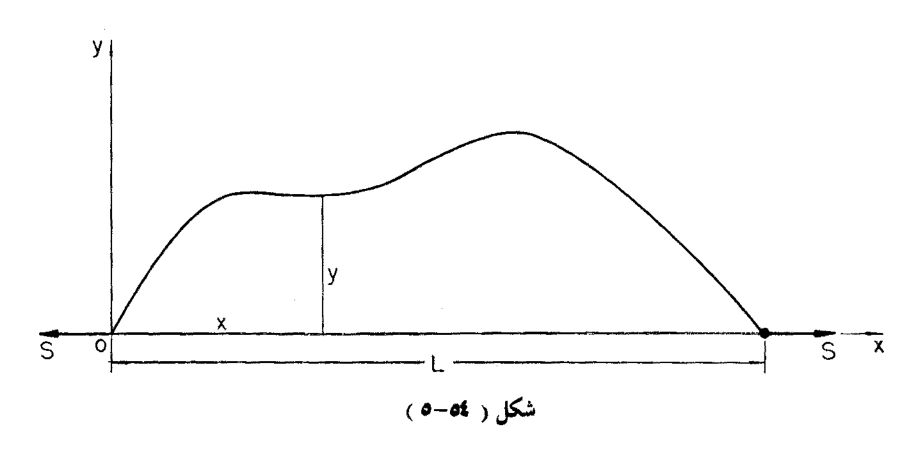
المعادلة التفاضلية التي تحقق الانحراف $y(x,t)$ عند اية نقطة $x$ تقع على الوتر في اي زمن $t$ يمكن التعبير عنها كالاتي : *

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (5.18.1)$$

حيث

$$a = \sqrt{S/\rho} \qquad (5.18.2)$$

تدل على سرعة انتشار الامواج في الوتركما ان $S$ (lb) تدل على الشد المؤثر على نهايتي الوتر كي يكون متوترا وان $\rho$ (lb sec$^2$/in.$^2$) هي كتلة وحدة الطول مـــن الوتـــر.




شكل ( ٥-٥٤ )

وفضلا عن ذلك فان الانحراف $y(x,t)$ يجب ان يحقق الشروط الحـــدوديـــة.

---

(*) هامش ص 265

$$y(0,t) = 0; \quad (5.18.3)$$

$$y(L,t) = 0, \quad (5.18.4)$$

$$y(x,0) = f(x); \quad (5.18.5)$$

$$y_t(x,0) = 0. \quad (5.18.6)$$

ان المعادلة ( 5.18.1 ) الزائدية مع الشروط الحدودية والشروط الاولية للمعادلات ( 5.18.3 ) ، ( 5.18.6 ) تؤلف مسألة قيم حدودية زمنية – فضائية احادية البعد . انها من نمط القيم الحدودية للمتغير الفضائي نمط القيم الاولية للمتغير الزمني .

وكما في حالة المعادلات التناقصية والمكافئة فان الفروق المحدودة يمكن استعمالها في حل المعادلات الزائدية . لنأخذ شبكة مستطيلة الشكل في المستوى $x,t$ واجعل $y_{i,j}$ هو الانحراف عند النقطة $x = x_i$ في الوقت $t = t_j$ كذلك اجعل فاصلة المشبك grid spacing $\Delta x = h$ في الفضاء و $\Delta t = k$ في الزمن . باستعمال مؤثرات الفرق المركزية من المرتبة $h^2$ ، $k^2$ في الفضاء والزمن على التوالـي .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h^2}; \quad (5.18.7)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{k^2}, \quad (5.18.8)$$

المعادلة (5.18.1) سيؤول الى معادلة الفرق التالية

$$y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j} - \frac{1}{\alpha^2}[y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}] = 0, \quad (5.18.9)$$

حيث :

$$\alpha^2 = \frac{a^2k^2}{h^2}. \quad (5.18.10)$$

معادلة المواترة recurrence formula التي تسمح بتعيين الازاحة عند $x = x_i$ في الزمن $t = t_{j+1}$ قد اشتقت من المعادلة (5.18.9) وذلك نحلها بدلالة $y_{i,j+1}$

$$y_{i,j+1} = \alpha^2[y_{i+1,j} + y_{i-1,j}] + 2(1 - \alpha^2)y_{i,j} - y_{i,j-1}. \quad (5.18.11)$$

من الواضح ان تبسيط المعادلة (5.18.11) يحصل بجعل $\alpha = 1$

$$y_{i,j+1} = [y_{i+1,j} + y_{i-1,j}] - y_{i,j-1}. \quad (5.18.12)$$

وبجعل فاصلة نقاط الارتكاز بالاتجاه $x$ كالاتي :

$$h = \frac{L}{N}, \qquad (5.18.13)$$

تصبح الشروط الحدودية والاولية للمعادلات من (5.18.3) وحتى (5.18.6) بصيغة الفرق المحدودة كالاتي :

$$y_{0,j} = 0; \qquad (5.18.14)$$

$$y_{N,j} = 0; \qquad (5.18.15)$$

$$y_{i,0} = f_i; \qquad (5.18.16)$$

$$y_{i,1} = y_{i,-1}. \qquad (5.18.17)$$

معادلة الانطلاق بتعويض المعادلة (5.18.17) في المعادلة (5.18.12) عندما نحصل على :

$$y_{i,1} = \frac{1}{2}(y_{i+1,0} + y_{i-1,0}) = \frac{1}{2}(f_{i+1} - f_{i-1}). \qquad (5.18.18)$$

ان المعادلة (5.18.12) مع قاعدة الانطلاق . والمعادلات (5.18.16) (5.18.18) والشروط الحدودية للمعادلات (5.18.14) (5.18.15) تسمح بتعيين الازاحات $y_{i,j}$ مثال ذلك :

اذا علم $y_{i,j}$ لجميع نقاط الارتكاز في الزمن $j = 1, j = 0$ فان الكميات $y_{i,2}$ تحسب بموجب المعادلة (5.18.12) حيث ان القيمتين عند النهايتين وهما $y_{N,2}$ , $y_{0,2}$ تتعينان بموجب المعادلتين (5.18.14) . (5.18.15) وهكذا بصورة عامة فان ابتداء من اي وقت $t = t_j$ حيث كل من القيمتين $y_{i,j-1}$, $y_{i,j}$ تكونا معلومتين فان القيمة $y_{i,j+1}$ يمكن حسابها وذلك بالاشتغال الى الامام في الوقت مستعملين معادلة المواترة (5.18.12) .

ان هذا الاسلوب يمثل حلا ينتشر الى الخارج في الزمن خلال منطقة مفتوحة . تتحدد بـ $x = L, x = 0$ منطلقا من الشروط الاولية للمسألة ( انظر شكل 5.1b ) .

---

(*) R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, "Über die partieller Differenzengleichugen der mathematischen Physik," *Math. Ann.* **100,** 32-74 (1928).

† The analytical solution of the problem is given by

ان كوارنت Courant وفردريش Friedrichs وليوى Lewy قد درسوا استقرار حل الفروق المحدودة لهذه المسألة وبينوا ان الاستقرار يعتمد على النسبة $\alpha$ ووفق الطريقة التالية:

( أ )اذا كانت $\alpha > 1$ فان تقريب الفروق المحدودة غير مستقر وعدم الاستقرار يزداد عنفا بزيادة قيم $\alpha$ .

(ب) اذا كانت $\alpha = 1$ فان تقريب الفروق المحدودة يكون مستقرا. وفضلا عن ذلك فان نتائج هذا التقريب مطابقة لكل مسألة متطابقة مع حل مسألة القيم الحدودية المتصلة الطبيعية [ حل المسألة التحليلي يتعين بالمعادلة التالية علما بان $f$ الدالة التي تظهر في شروط المعادلة (5.18.5) الاولية ]

$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)],$$

(ج) اذا كانت $\alpha < 1$ فان تقريب الفروق المحدودة مستقر غير ان دقة الحل تتناقص بتناقص قيمة $\alpha$ .

ومن المفيد ان نلاحظ اننا نحصل على حل صحيح باحكام *rigorously correct* عندما $\alpha = 1$ . بينما يبقى الحل مستقرا الا انه يتناقص في الدقة كلما صفرت قيم $\alpha$ .

ان مسألة الدقة يرتبط مباشرة بنظرية المميزات theory of characteristics للمعادلات الزائدية.

من الممكن الاثبات بصورة عامة . على ان الدقة المثلى *decreases* accuracy نحصل عليها من الفروق المحدودة عندما تكون مميزات حل الفروق المحدودة متطابقة مع مميزات حل المعادلة التفاضلية الجزئية الزائدية . ان حقيقة الحصول على حل دقيق من الفروق المحدودة للمسألة ( الواردة في السؤال ) تتبع من خاصية فريدة لمعادلة الموجبة وهي ان مميزاتها $x + at,\ x - at$ هي خطوط مستقيمة . اما بالنسبة الى المعادلات الزائدية المعقدة التي لها بوجه عام مميزات منحنية فان الدقة المثلى نحصل على استعمال احداثيات انحنائية والتي تناظر باقرب مايمكن المميزات الانحنائية للمعادلات التفاضلية الجزئية بدلا من استعمال المحاور المتعامدة الثابتة من النوع الذي استعمل في هذه المسألة.

وفي مسائل عملية عديدة وجد انه من الملائم استعمال اقواس الميزات المنحنية كمحاور احداثية في شبكة الفروق المحدودة للمنظومة الزائدية.

انظر مثلا * :

S. H. Crandall, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956, pp. 358–365 and p. 396 ff.

## 5.19 مسألة قيم حدودية حاوية على $\nabla^4 z$

**A Boundary Value Problem Involving**

ان مسألة القيم الحدودية للانحرافات ( a ) التي تخص صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها ( $a$ ) مثبتة من جميع اطرافها تتعين بالمعادلة التالية :

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}; \qquad w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$ عند الحدود (5.19.1)

حيث $q$ يساوي الحمل لكل وحدةمساحة من الصفيحة

الجسؤة الانثنائية للصفيحة $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$

سمك الصفيحة = $h$

معامل يونك ونسبة بواسان على التوالي لمادة الصفيحة = $E, \nu$

اتجاه العمود على الحدود = $n$

المسألة (5.19.1) تؤول الى صيغة لابعدية باستعمال التحويل التالي :

$$x = \xi a; \qquad y = \eta a; \qquad w(x,y) = \frac{qa^4}{D} z(\xi,\eta), \qquad \text{(a)}$$

وهذه تعطي :

$$\nabla^4 z = 1; \qquad z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \qquad \text{on the boundary,} \qquad (5.19.2)$$

عند الحدود

حيث اخذ $\nabla^4$ بالنسبة الى $\xi$ ، $\eta$

ان الحل العددي للمسألة (5.19.2) ينتج بالتعويض عن $\nabla^4 z$ بمؤثر الفرق المركزي للشكل 5.3e ذي الشبكة المربعة الذي عينه $= 1/n$

ان الشروط الحدودية بموجب المعادلة ( 4.1.1 ) تنص على ان قيم $z$ عند نقاط الارتكاز خارج الحدود مباشرة تساوي قيم $z$ عند النقاط الكائنة داخل الحدود مباشرة وعلى نفس العمود واذا ابتدئنا بجعل $n = 2$ ( شكل 5.55 ) فان المعادلة (5.19.2) تعطي مايأتي :

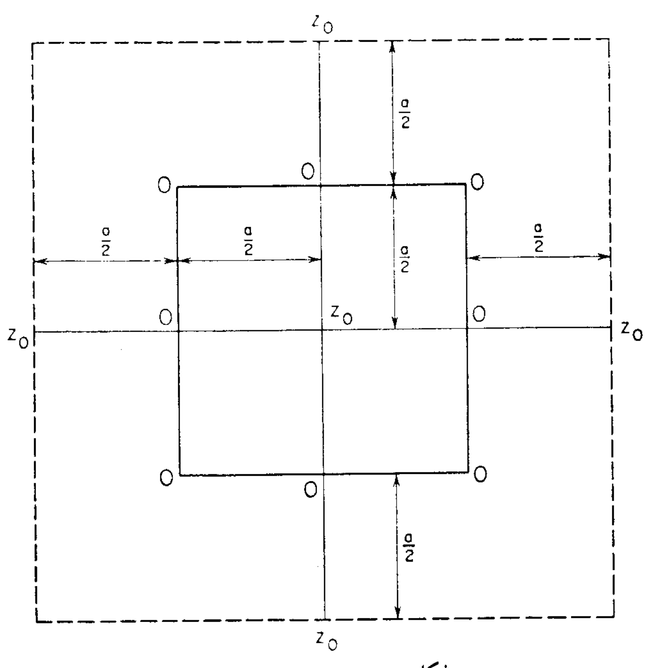
$$(z_0 + z_0 + z_0 + z_0) + 2 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 20 z_0 = \frac{1}{2^4},$$

منها ينتج

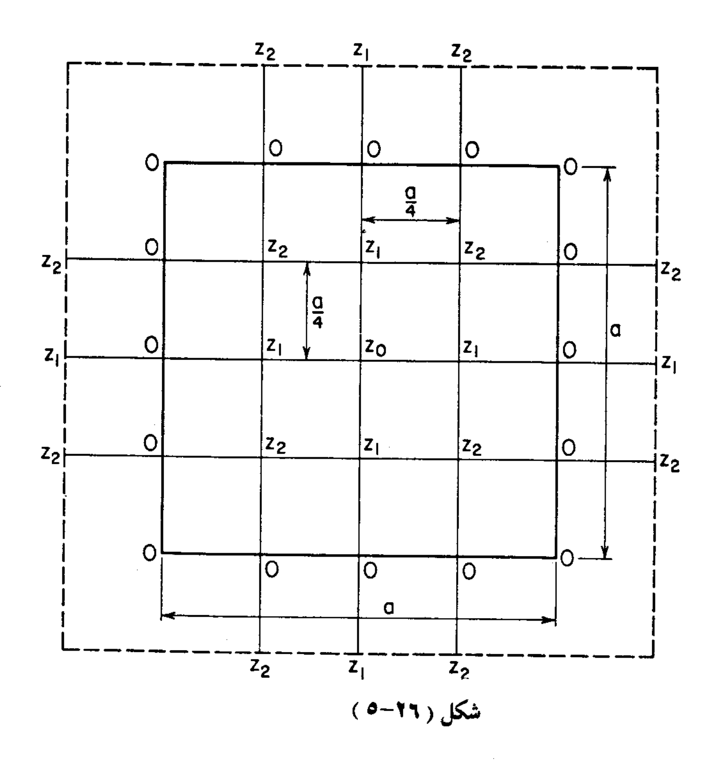
$$z_0 \Big]_2 = \frac{1}{2^4 \cdot 24} = \frac{1}{384}$$

وعندما $n = 4$. فان تطبيق المعادلة (5.19.2) عند نقاط الشكل 5.56 تعطي عند :

$$20 z_0 - 32 z_1 + 8 z_2 = \frac{1}{4^4};$$




شكل (٥-٥٥)




شكل (٢٦-٥)

وعند (1) : $$-8z_0 + 26z_1 - 16z_2 = \frac{1}{4^4};$$

وعند (2) : $$2z_0 - 16z_1 + 24z_2 = \frac{1}{4^4},$$

ومنها وبموجب نهج كاوس

$$z_0\Big]_4 = \frac{0.461}{4^4}; \qquad z_1\Big]_4 = \frac{0.309}{4^4}; \qquad z_2\Big]_4 = \frac{0.209}{4^4}.$$

وبالمثل ان كانت $n = 8$ فان :

$$z_0\Big]_8 = 5.857/8^4$$

حيث يصبح الانحراف عند مركز الصفيحة حيث $\nu = 0$ , $n = 8, 4, 2$ بموجب المعادلة (a)

$$w_0\Big]_2 = \frac{12(1-0.3^2)}{384}\frac{qa^4}{Eh^3} = 0.0284\frac{qa^4}{Eh^3} \qquad (e = -106\%),$$

$$w_0\Big]_4 = \frac{12(1-0.3^2)\cdot 0.461}{256}\frac{qa^4}{Eh^3} = 0.0197\frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = -43\%),$$

$$w_0\Big]_8 = \frac{12(1-0.3^2)\cdot 5.857}{4096}\frac{qa^4}{Eh^3} = 0.0156\frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = -13\%).$$

ان النسب المئوية للاخطاء $e$ قد حسبت من قيمة الحل المتسلسلي والذي استخرجه ( نوموشينكو) كما ان الاستيفاءات من نمط $h^2$ قد استعملت على قيم التقريبات (انظر 2.13 ) وتعطي :

$$w_0\Big]_{2,4} = 0.0167\frac{qa^4}{Eh^3} \qquad (e = -21\%);$$

$$w_0\Big]_{4,8} = 0.0142\frac{qa^4}{Eh^3} \qquad (e = -2.9\%),$$

$$w_0\Big]_{2,4,8} = 0.0140\frac{qa^4}{Eh^3} \qquad (e = -1.4\%).$$

## 5.20 مسائل القيم المميزة ثنائية البعد

***Two-dimensional Characteristic Value Problems***

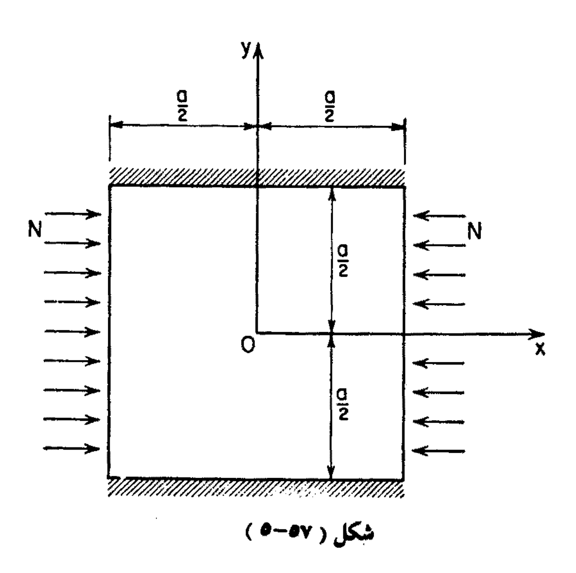
لنأخذ مربع الشكل طول ضلعه $a$ مسند ببساطة على حافتين متقابلتين ومثبت على الحافتين الاخرتين . تؤثر على اللوح قوة منتظمة ضاغطة قدرها $N$ ( لكل وحدة طول )عمودية على حافتي الاسناد البسيطتين وتعمل في نفس مستوى اللوح ( شكل 5.57 ).

باختبار اتجاه المحور $x$ موازيا للحافتين المثبتتين مع جعل نقطة الاصل عند مركز اللوح ، من الممكن اثبات ان انحراف اللوح $w$ عند النقطة ( $x,y$ ) يحقق المعادلة التفاضلية ( راجع نظرية الاستقرار ص 337 ) التالية :

$$\nabla^4 w + \frac{N}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad (5.20.1)$$

حيث $D$ هي الجسوءة الانثنائية flexural rigidity للوح المطلوب استخراج اصغر قيمة $N$ التي تسبب حول ( buckling ) اللوح . اي قيمة التي لن يكون الانحراف

$w$ فيها مطابقا للصفر ، مع تحقيق الشروط الحدودية للاسناد البسيط :




شكل ( ٥٧-٥ )

$$w = 0; \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm \frac{a}{2} \qquad (5.20.2)$$

وشروط الانعدام للدوران complete lack of rotation

$$w = 0; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm \frac{a}{2}. \qquad (5.20.3)$$

تعاد المعادلة (5.20.1) اولا الى صيغة لابعدية بموجب التحويل التالي :

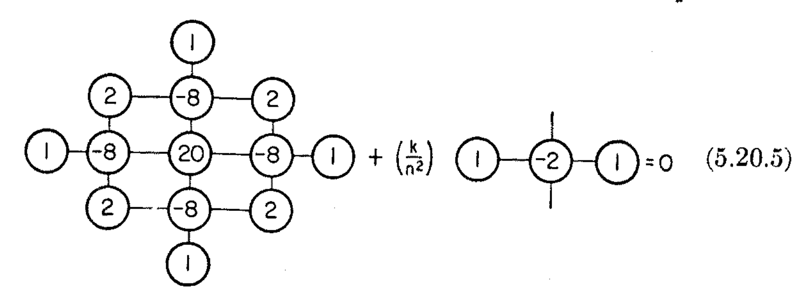
$$\xi = \frac{x}{a}; \qquad \eta = \frac{y}{a}, \qquad (a)$$

وبعد ضربها $a^4$ تصبح :

$$\nabla^4 w + \frac{Na^2}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \qquad (5.20.4)$$

علما بان $\nabla^4$ قد استخرجت بالنسبة الى $\xi$ . $\eta$ ومن ثم تغطي اللوح بشبكة مربعة حجم عينها $1/n$ . وبضرب المعادلة بالمقدار $h^4 = 1/n^4$ واستعمال مؤثر الشكل 5.3c أي $h^4\nabla^4 w$ واستعمال مؤثر المعادلة (5.2.2) أي $\partial^2 w/\partial \xi^2$ . فان معادلة الفروق التي تناظر المعادلة

(5.20.4) تقتني بالصيغة الجزئية molecular form التالية :




(5.20.5)

(5.20.6) حيث :
$$k = \frac{Na^2}{D}.$$

ان تطبيق المعادلة (5.20.5) عند نقاط الارتكاز الداخلية يؤدي الى مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية المتجانسة في مجاهيل هي ازاحات الارتكاز $w_i$ التي يجب ان يطابق الصفر لكي تختلف قيم $w_i$ عن الصفر . فان اصغر قيمة $N$ التي تجعل محددة المعادلات (5.20.5) تساوي الصفر هي اصغر قيمة حرجة للقوة الضاغطة .

ولكي تطبق المعادلة (5.20.5) على نقط الارتكاز داخل الحدود مباشرة . فان الانحراف deflections يجب ان يكون معلوما عند نقاط ارتكاز وهمية خارج الحدود مباشرة . ان هذا الانحراف معطى بدلالة الانحرافات عند نقاط الارتكاز داخل الحدود مباشرة وبموجب الشروط الحدودية . وفي الحقيقة بموجب المعادلات (4.1.1) تصبح المعادلات (5.20.2)

$$w_i = 0; \qquad w_l = -w_r \qquad \text{at } \xi = \pm\tfrac{1}{2}, \qquad (5.20.7)$$

بينما تعطي المعادلة (5.20.3)

$$w_i = 0; \qquad w_a = w_b \text{ عند at } \eta = \pm\tfrac{1}{2}. \qquad (5.20.8)$$

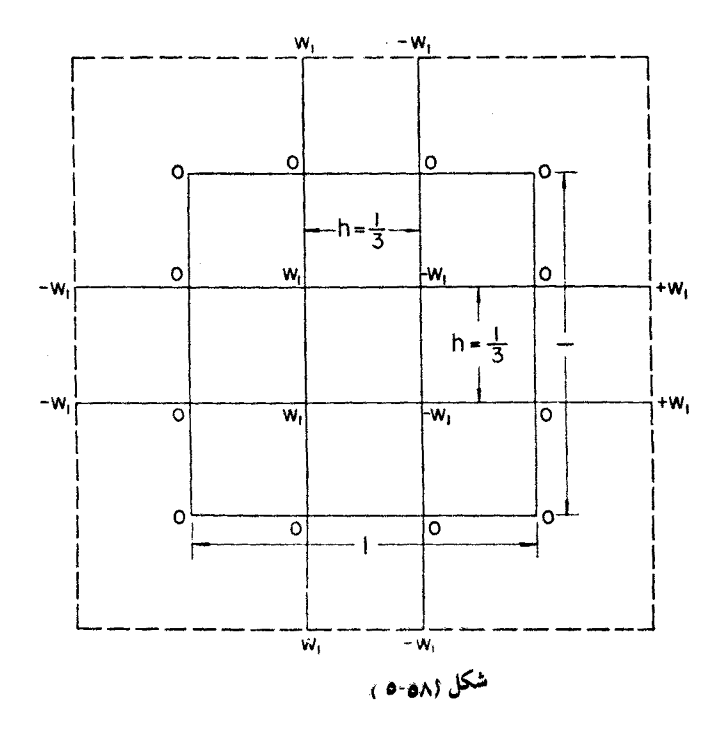
لنبدأ بجعل $n = 3$ وانحرافات الشكل 5.58 غير متناظرة *

$$(-w_1 + w_1 + 0 + 0) + 2(0 + 0 + 0 - w_1) - 8(0 + 0 + w_1 - w_1)$$

نحصل على :
$$+ 20w_1 + \frac{k_3}{9}(0 - 2w_1 - w_1) = 0,$$

(*) هامش ص ٢٧٢

ان الانحرافات المتناظرة باتجاه $x$ تعطي حمل حدل أعلى .



شكل (٥٨-٥)

أو

$$w_1\left(18 - \frac{k_3}{3}\right) = 0,$$

ومن هذه يحصل :

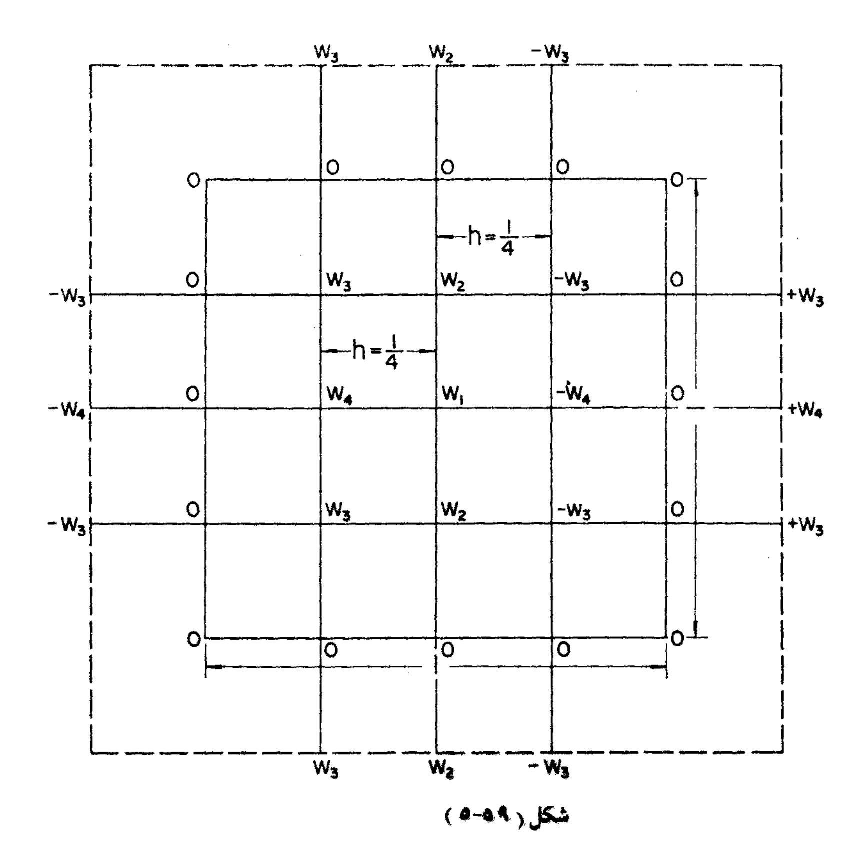
$$k_3 = 54 = 5.471\pi^2. \qquad \text{(b)}$$

وبجعل $n = 4$ والانحرافات غير المتناظرة للشكل 5.59 نحصل على معادلات الجدول 5.17

**Table 5.17**

| $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ |
|---|---|---|---|
| $20 - 2\gamma$ | $-16$ | $0$ | $0$ |
| $-8$ | $22 - 2\gamma$ | $0$ | $0$ |
| $2$ | $\gamma - 8$ | $20 - 2\gamma$ | $-8$ |
| $\gamma - 8$ | $4$ | $-16$ | $18 - 2\gamma$ |

جدول (١٧-٥)




شكل (٥٩-٥)

وبجعل محددة هذه المجموعة من المعادلات مساوية الصفر ينتج :

$$(20-2\gamma)[(20-2\gamma)(22-2\gamma)-8\times 16][(20-2\gamma)(18-2\gamma)-8\times 16] = 0,$$

نجعل من العامل الثالث على اصغر جذر $\gamma = 3.821$ ولذلك

$$k_4 = 61.136 = 6.193\pi^2. \qquad \text{(c)}$$

ان القيمة المستوفاه extrapolated التي تبلغ $k_{3,4} = 7.121\pi^2$ تزيد قليلا عن قيمة $k$ الصغرى التي استخرجها ( تمينوشينكو) ( التي تحدث للوح النسبة بين ضلعيه $a/b$ 0.6، 0.7 وانحرافات متناظرة) وعلى هذا فان القيمة المستخرجة لايمكن ان تختلف كثيرا عن قيمة $x$ الحقيقية .

## 5.21 حل المعادلات التفاضلية الجزئية بفصل المتغيرات والفروق المحدودة

***The Solution of Partial Differential Equations by Separation of the Variables and Finite Differences***

غالبا مايكون من المفيد ان نجمع بين الطريقة التقليدية لفصل المتغيرات وبين الاساليب العددية الحديثة كي نحل المعادلات التفاضلية الجزئية . ان هذه الطريقة المختلطة ستتضح بتطبيقها على مسألة الحدل من البند السابق.حيث ان ضلعين من اللوح المربع الشكل تستند استنادا بسيطا وان الحمل الاصغر للحدل يقابل التشويه غير المتناظر بالاتجاه w فان من المنطق ان نفرض الانحراف $x$ على الشاكلة التالية :

$$w(x,y) = Y(y) \sin \frac{2\pi}{a} x, \qquad (5.21.1)$$

حيث $Y(y)$ هي دالة غير معلومة من $y$ لوحدها.ان دالة الانحراف deflection function $w$ يفي بالشروط الحدودية عند الحدود البسيطة المسند المعادلات ( 5.20.2 ) . وعند تعويضها في معادلة التوازن [ المعادلة ( 5.20.1 )] فانها الى معادلة تفاضلية عادية بدلالة $Y$ :

$$Y^{\text{iv}} - 8\frac{\pi^2}{a^2} Y'' + \left(\frac{16\pi^4}{a^4} - \frac{N}{D}\frac{4\pi^2}{a^2}\right) Y = 0. \qquad (5.21.2)$$

وبتعويض المعادلة ( 5.21.1 ) في الشروط الحدودية على طول الحافات المثلثة [ المعادلة ( 5.20.3 )] نحصل على شروط $Y$ الحدودية .

$$Y = 0; \qquad Y' = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm\frac{a}{2}. \qquad (5.21.3)$$

وهكذا فأن مسألة القيمة الميزة الجزئية للمعادلات (5.20.1),(5.20.2)،(5.20.3) تعاد الى مسألة القيمة المميزة العادية للمعادلات (5.21.2) .(5.21.3).

ولكي نحل المسألة الاخيرة بصيغة لابعدية نستعمل التحويل$y = a\eta$حيث نحصل على :

$$\frac{d^4Y}{d\eta^4} - 8\pi^2\frac{d^2Y}{d\eta^2} + \left(16\pi^4 - 4\pi^2\frac{Na^2}{D}\right) Y = 0; \qquad (5.21.4)$$

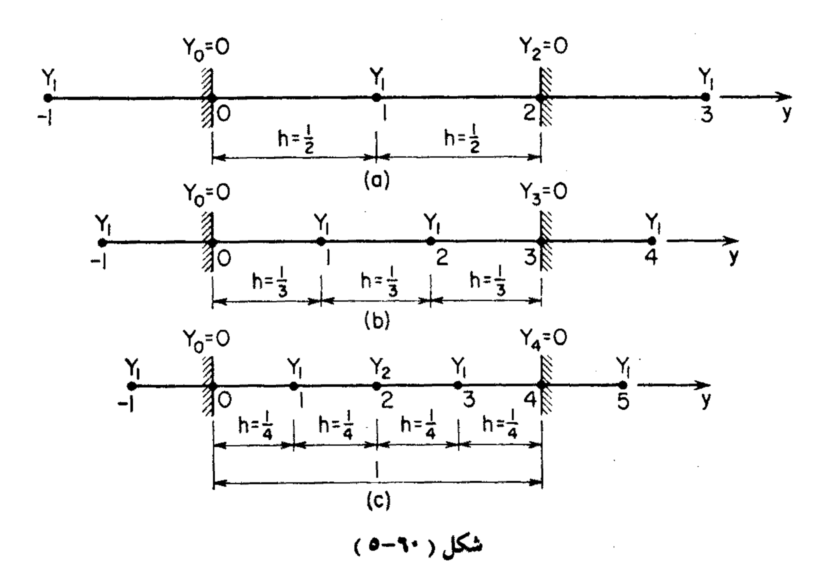
$$Y(\eta) = 0; \qquad \frac{dY}{d\eta} = 0 \quad \text{at} \quad \eta = \pm\tfrac{1}{2}. \qquad (5.21.5)$$

بضرب المعادلة ( 5.21.4 ) في $h^4 = 1/n^4$ وتعويض تعابير الفروق المركزية لمشتقات y المعادلات ( 2.7.16 )] نحصل على معادلة الفرق بدلالة $Y$ :

$$Y_{bb} - \left(\frac{8\pi^2}{n^2} + 4\right) Y_b + \left(6 + \frac{16\pi^2}{n^2} + \frac{16\pi^4}{n^4} - \frac{4\pi^2 k}{n^4}\right) Y_i - \left(\frac{8\pi^2}{n^2} + 4\right) Y_a + Y_{aa} = 0, \quad (5.21.6)$$

حيث $k$ تتعين بموجب المعادلة ( 5.20.6 ). ان الشروط الحدودية تتطلب :

$$Y_a = Y_b \quad \text{at} \quad \eta = \pm\tfrac{1}{2}. \qquad (5.21.7)$$




شكل ( ٦٠-٥ )

فاذا ابتدأنا بجعل $n = 2$ وبقيم $Y$ كما في الشكل ( 5.60a ) . حيث رسم المحور $y$ أفقيا لتيسير الامر . فان المعادلة ( 5.21.6 ) تعطي :

$$Y_1 + 0 + \left(6 + \frac{16\pi^2}{4} + \frac{16\pi^4}{16} - \frac{4\pi^2}{16} k_2\right) Y_1 + 0 + Y_1 = 0,$$

ومن هذه يكون :

$$k_2 = 5.95\pi^2. \qquad \text{(a)}$$

وبجعل $n = 3$ وقيم $Y$ كما في الشكل ( 5.60b ) فان المعادلة ( 5.21.c ) تعطي .

$$Y_1 + 0 + \left(6 + \frac{16\pi^2}{9} + \frac{16\pi^4}{81} - \frac{4\pi^2}{81} k_3\right) Y_1 - \left(\frac{8\pi^2}{9} + 4\right) Y_1 + 0 = 0,$$

ومنها يكون :

$$k_3 = 6.36\pi^2. \qquad \text{(b)}$$

وعندما نبدأ بجعل $n = 4$ واستعمال قيم $Y$ كما في الشكل 60 نحصل على المعادلتين

$$Y_1 + 0 + \left(6 + \frac{16\pi^2}{16} + \frac{16\pi^4}{256} - \frac{4\pi^2}{256} k_4\right) Y_1 - \left(\frac{8\pi^2}{16} + 4\right) Y_2 + Y_1 = 0;$$

$$0 - \left(\frac{8\pi^2}{16} + 4\right) Y_1 + \left(6 + \frac{16\pi^2}{16} + \frac{16\pi^4}{256} - \frac{4\pi^2}{256} k_4\right) Y_2 - \left(\frac{8\pi^2}{16} + 4\right) Y_1 + 0 = 0.$$

ان الجذر الاصغر لمحددة هذه المعادلات يساوي :

$$k_4 = 6.70\pi^2. \qquad \text{(c)}$$

وعند استخدام استيفاءات $h^2$ في المعادلات (a) ، (b) ، (c) نحصل على النتائج التالية :

$$k_{2,3} = 6.69\pi^2; \qquad k_{3,4} = 7.14\pi^2.$$

ان الحل بفصل المتغيرات يعطينا نتائج بنفس مرتبة الدقة كتلك التي تحصل عليها من حل الفروق المحدودة الثنائية البعد الوارد في البند 5.20 الا انها اقل عناء حيث ان تعيين قيمة $k_4$ مثلا يتضمن محددة من المرتبة الثانية في الحل الاحادي البعد وعلى محددة من المرتبة الرابعة في الحل الثنائي البعد .

# تمارين

5.1 ) اشتق مؤثرات الفرق المناظرة الى المؤثرات التفاضلية التالية وبدلالة الفروق الامامية ذات الخطأ من المرتبة $h^2$

(a) $h^2 D_{xy}$. (b) $h^2 \nabla^2$. (c) $h^4 D_{xxyy}$.

ارسم الجزيئات المناظرة

الجواب : انظر شكل 5.61

5.2 ) عين مؤثرات الفرق المحدودة التي تناظر المؤثرات التفاضلية التالية وبدلالة الفروق الخلفية ذات الخطأ من المرتبة $h^2$

(a) $h^2 D_{xy}$. (b) $h^2 \nabla^2$. (c) $h^4 D_{xxyy}$.

ارسم الجزيئات المناظرة

الجواب : انظر شكل 5.62

5.3 (a) عين الحد الاول من الخطأ في مؤثرات المسألة 5.1(a), (b), (c)

(b) عين الحد الاول من الخطأ في مؤثرات المسائل 5.2(a), (b)

5.4 برهن ان الخطأ في قاعدة الثلث لسمبسن للتكامل الثنائي ذات المرتبة $h^4$

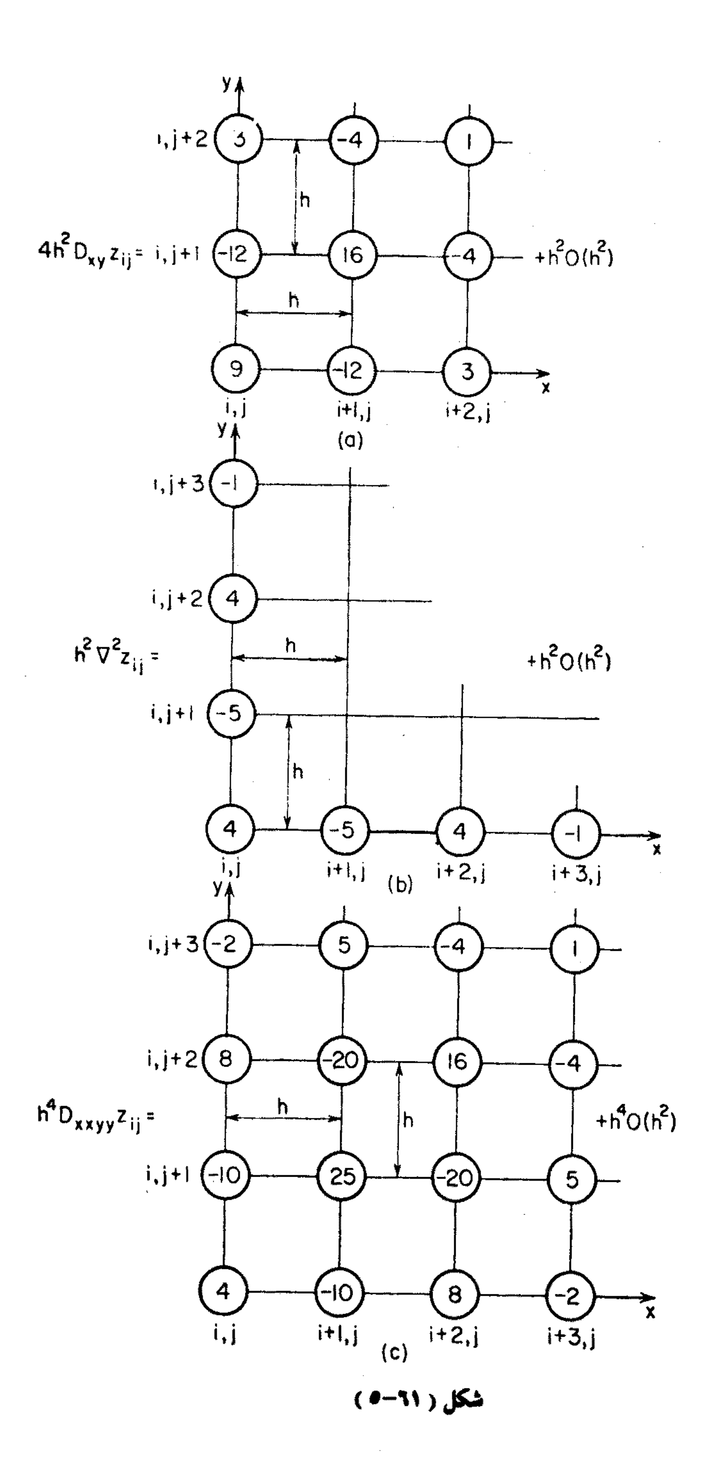
5.5 جد التكاملات التالية ولاربعة ارقام معنوية بموجب قاعدة الشبه المنحرف مستعملا شبكات رباعية حيث $n = 2$ والفترات الفرعية $= 4$ والاستيفاء

(a) $\int_2^4 dy \int_4^6 \ln xy^2 \, dx$. (b) $\int_0 dy \int_0^{\pi/2} \sin \sqrt{2xy} \, dx$.

(c) $\int_1^5 dy \int_1^5 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$. (d) $\int_0^1 dy \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)} \, dx$.

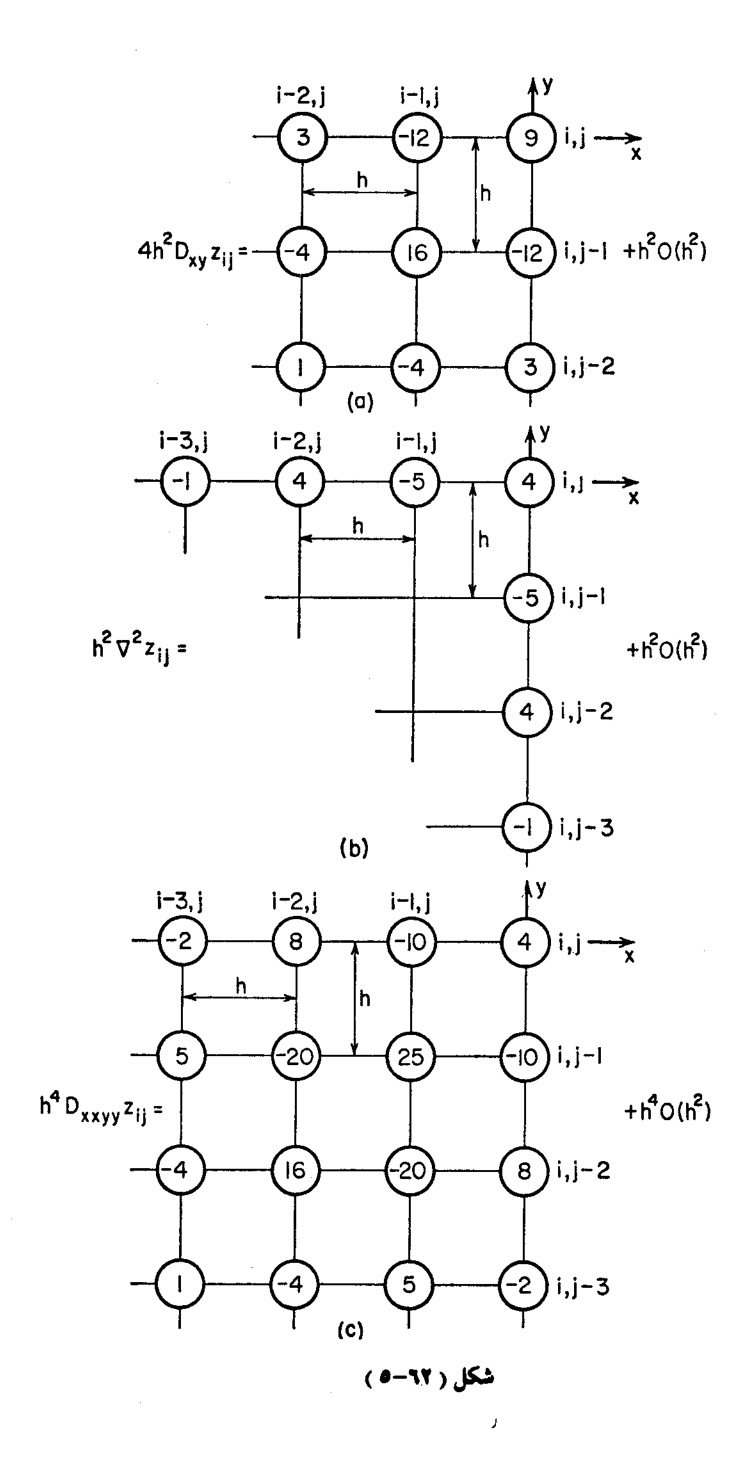
الجواب :

(a) $A_2 = 14.95$; $A_4 = 15.02$; $A_{2,4} = 15.05$. (c) $A_2 = 4.134$; $A_4 = 3.997$; $A_{2,4} = 3.952$.



y
i, j+2
3
-4
1
h
$4h^2 D_{xy} z_{ij}$ =
i, j+1
-12
16
-4
$+h^2 O(h^2)$
h
9
-12
3
x
i, j
i+1, j
i+2, j
(a)
y
i, j+3
-1
i, j+2
4
$h^2 \nabla^2 z_{ij}$ =
h
$+h^2 O(h^2)$
i, j+1
-5
h
4
-5
4
-1
x
i, j
i+1, j
(b)
i+2, j
i+3, j
y
i, j+3
-2
5
-4
1
i, j+2
8
-20
16
-4
$h^4 D_{xxyy} z_{ij}$ =
h
h
$+h^4 O(h^2)$
i, j+1
-10
25
-20
5
4
-10
8
-2
x
i, j
i+1, j
i+2, j
i+3, j
(c)


شکل (۶۱-۵)



i-2,j
i-1,j
y
3
-12
9
i,j
x
h
h
$4h^2 D_{xy} z_{ij}$ =
-4
16
-12
i,j-1
$+h^2 O(h^2)$
1
-4
3
i,j-2
(a)
i-3,j
i-2,j
i-1,j
y
-1
4
-5
4
i,j
x
h
h
-5
i,j-1
$h^2 \nabla^2 z_{ij}$ =
$+h^2 O(h^2)$
4
i,j-2
-1
i,j-3
(b)
i-3,j
i-2,j
i-1,j
y
-2
8
-10
4
i,j
x
h
h
5
-20
25
-10
i,j-1
$h^4 D_{xxyy} z_{ij}$ =
$+h^4 O(h^2)$
-4
16
-20
8
i,j-2
1
-4
5
-2
i,j-3
(c)


شکل (٦٢-٥)

5.6 جد التكاملات للمسألة 5.5 ولاربعة ارقام معنوية بموجب قاعدة السمبسن الثلثية مستعملا شبكة رباعية حيث $n = 2$ الفترات الفرعية تساوي 4 والاستيفاء .

الجواب : (b) $A_2 = 1.585$; $A_4 = 1.724$; $A_{2,4} = 1.733$. (c) $A_2 = 3.962$; $A_4 =$ 3.963; $A_{2,4} = 3.963$.

5.7 جد التكاملات التالية ولاربعة ارقام معنوية مستعملا شبكة مستطيلة حيث $n = 2$ الفترات الفرعية تساوي 4 والاستيفاء .

(أ) بموجب قاعدة الاشباه المنحرفة .

(ب) بموجب قاعدة سمبسن الثلثية .

$$\int_0^1 dy \int_0^{0.5} \sinh(x^2 y)\, dx$$

5.8 جد تكامل المعادلة ( 5.3.10 ) بموجب قاعدة الشبه المنحرف ولما يأتي :

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2;\ \phi_1(y) = 1;\ \phi_2(y) = 2y;\ c = 1;\ d = 4.$
(b) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1/2};\ \phi_1(y) = 0;\ \phi_2(y) = y^2;\ c = 1;\ d = 4.$
(c) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1/2};\ \phi_1(y) = y;\ \phi_2(y) = y^2;\ c = 1;\ d = 4.$
(d) $f(x,y) = x + y^2;\ \phi_1(y) = y^2;\ \phi_2(y) = y;\ c = 1;\ d = 4.$

استعمل : $k = 1,\ m = 4$

الجواب : (a) $I = 295.9$. (c) $I = 2.119$

5.9 حل المسائل 5.8 بموجب قاعدة سمبسن حيث $k = \frac{1}{2},\ m = 4$

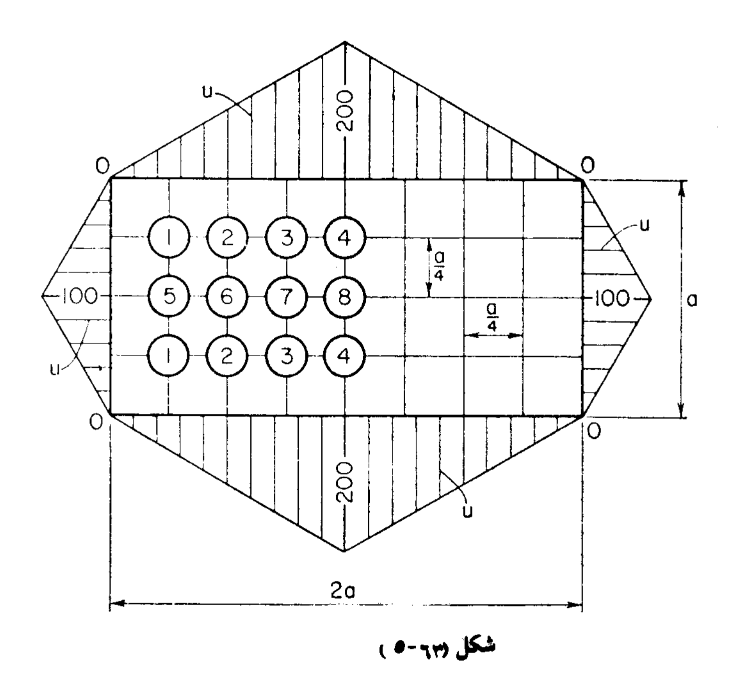
الجواب : (a) $I = 275.2$. (c) $I = 2.225$.

5.10 عين وبموجب اسلوب ليبمان Liebmann درجة الحرارة المستقرة عند نقاط الارتكاز للوح مستطيل الشكل ابعاده $b$ ، $a$ من الشكل 5.63

اذا كانت هذه الابعاد ذات درجة حرارة المؤثر في الشكل . استعمل مؤثر الشكل 5.36

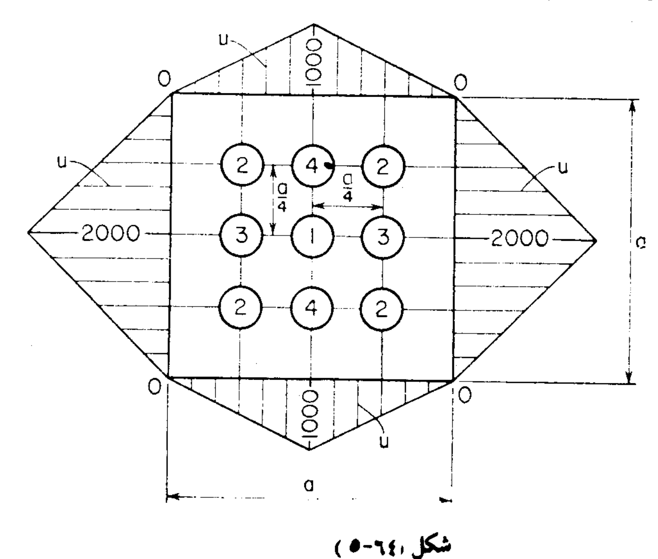
الجواب

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 72 | 102 | 132 | 151 | 87 | 104 | 127 | 139 |




شكل (٦٣-٥)

5.11 عين بالمعاودة iteration القيم عند نقاط ارتكاز مربع الشكل 5.64 للدالة التوافقية التي قيمها الحدودية واردة في الشكل . استعمل مؤثر 5.36 حيث $n = 2$ والفترات الفرعية تساوي 4 والاسيفاء .

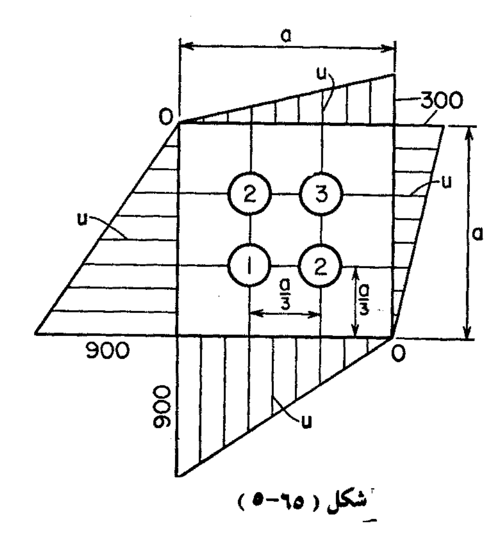



شكل (٦٤-٥)

5.12 عين بطريقة الارخاء درجة الحرارة المستقرة عند نقاط ارتكاز لوح الشكل 5.65 اذا حفظت اضلاعه في درجة الحرارة المؤشرة في الشكل ، استعمل مؤثر المعادلة 5.3b

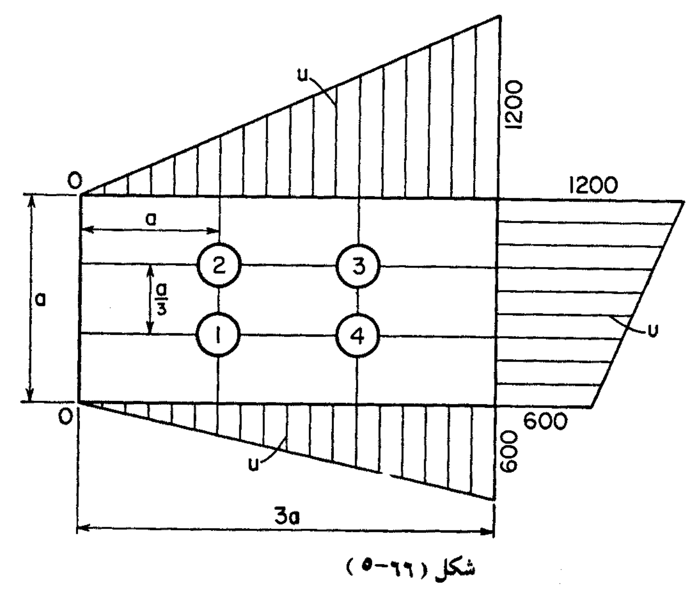
الجواب

$$u_1 = 433; u_2 = 267; u_3 = 233.$$




شكل ( ٥-٦٥ )

5.13 عين بطريقة الاسترخاء درجة الحرارة المستقرة عند نقاط ارتكاز لوح في الشكل 5.66 اذا حفظت اضلاعه في درجة الحرارة المؤثرة في الشكل ، استعمل مؤثر المعادلة (5.2.11)




شكل ( ٥-٦٦ )

5.14 ابتدأ حل المسألة 5.12 بطريقة الارخاء الكتلي واستمر بهذا الاسلوب متبعا فرط الارخاء وتحته .

5.15 ابتدأ حل المسالة 5.10 بطريقة الارخاء الكتلي واستمر بهذا الاسلوب متبعا فرط الارخاء وتحته.

5.16 استعمل شبكة مدرجة عينها ( الفتحة ) نصف ماكانت عليه في المسألة 5.13 وفي الجزء الايمن الثالث من اللوح تاركا الفتحات على حالها فيما عدا ذلك وكي تحصل على تعريف افضل لدرجة حرارة هذه المنطقة .

5.17 استعمل شبكة مدرجة حجمها $a/9$ في الركن الايسر الاسفل من اللوح الوارد في المسألة 5.12 تاركا الفتحات على حالها فيما عدا ذلك ولكي تحصل على تعريف افضل لدرجة حرارة هذه المنطقة .

5.18 )(أ) حل بطريقة الاسترخاء المسألة 5.11 مستعملا المؤثر $N$ للشكل 5.32

(ب) حل بطريقة الاسترخاء المسألة 5.12 مستعملا المؤثر $N$ للشكل 5.32

5.19 ) عين التغير الجانبي عند نقاط ارتكاز غشاء مربع الشكل طول ضلعه $L$ فارضا ان $PL^2/S = 16.000$ الفترات الفرعية $n = 4$ ( انظر البند 5.6 .استعمل مؤثر الشكل 5.3b )

الجواب : $u_1 = 1125;\ u_2 = 875;\ u_3 = 687.5.$

5.20 ) لوح مربع الشكل طول ضلعه = $a$ مستند استنادا بسيطا أثقل بثقل منتظم قدره $q$ عين التغير وعزم الانحناء في مركز اللوح فارضا بان نسبة بواسان $\nu = 0.3$ استعمل $n = 2$ ، $n = 4$ فترات فرعية والاستيفاء.

( تلميح ) : معادلة اللوح التفاضلية هي $\nabla^4 w = q/D$ ( انظر البند 5.19 ) والتي يمكن تجزئتها الى معادلتين من المرتبة الثانية وذلك بجعل

$M = (M_x + M_y)/(1 + \nu)$ حيث يدل $M_x$ و $M_y$ على عزمي الانحناء لكل وحدة طول من المقطعين العمودين على المحورين $x$-$y$ على التوالي.

المعادلات في $M$ ; $w$ هي :

$\nabla^2 M = -q$ : $\nabla^2 w = -M/D$ الشروط الحدية لكلتا $M$ و $w$ هي $w = 0$ و $M = 0$ عند الحدود . استعمل مؤثر الشكل 5.3b ثم حل مجموعة المعادلات الآنية لقيم ارتكاز

$w$ و $M$ بموجب نهج كاوس.

الجواب :

$M_2 = 0.0406qa^2$; $w_2 = 0.00391qa^4/D$; $M_4 = 0.0457qa^2$;
$w_4 = 0.00403qa^4/D$; $M_{2,4} = 0.0474qa^2$; $w_{2,4} = 0.00406qa^4/D$.
$M = 0.0479qa^2$; $w = 0.00405qa^4/D$.

**5.21** ) عين بطريقة المعاودة iteration قيمة الدالة $z$ المحققة للمعادلة $\nabla^2 z = 1$ اذا كانت $z = 0$ عند حدود مربع ضلعه $a$ .استعمل مؤثر الشكل 5.3b $a/4$, $h = a/2$ ثم استوف extrapolate قيمة $z$ عند مركز المربع

**5.22** ) قيم $z$ عند نقاط ارتكاز مربع ضلعه $a = 4h = 2$ . اذا كانت $\nabla^2 z = x^2y^2$, $z = 0$ عند الحدود .افرض نقطة الاصل ( النقطة 2 ) انها عند مركز المربع واستعمل مؤثر الشكل 5.3b . الجواب :

$z_1 = z_3 = -0.00391$; $z_2 = -0.00586$.

**5.23** ) حل بطريقة المعاودة iteration المسألة 5.19 مستعملا المؤثر $N$ للشكل 5.32

**5.24** ) حل المسألة 5.20 مستعملا مؤثر بواسان المحسن للشكل (5.11.4) .

**5.25** ) (أ) عين بطريقة الاسترخاء قيم ارتكاز الدالة $\phi$ التي تحقق معادلة الالتواء torsional equation $\nabla^2\phi + 2 = 0$ والتي قيمها تبلغ الصفر عند الحدود للبند من الشكل 5.67a ) استعمل مؤثر الشكل 5.3b

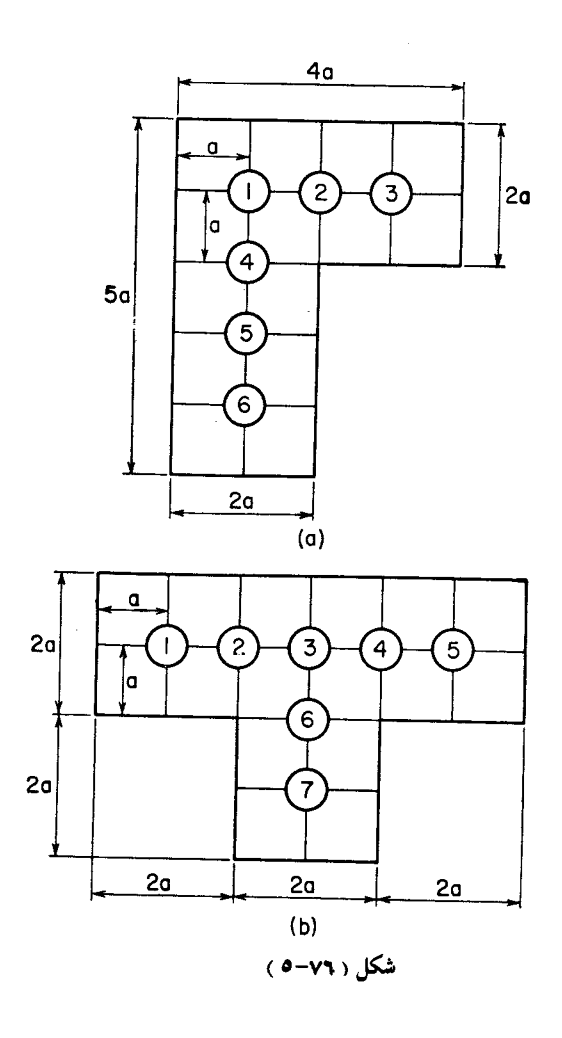
(ب) اعد بالنسبة للشكل 5.67b

(ج) عين صلابة الالتواء torsional rigidity للبند من الشكل 5.67a ( انظر البند 5.7 )

(د) اعد بالنسبة الى الشكل 5.67b استعمل قاعدة الشبه المنحرف لاستخراج التكامل.

الجواب :

(a) $\phi_1 = \phi_4 = 0.9756a^2$; $\phi_2 = \phi_5 = 0.9268a^2$; $\phi_3 = \phi_6 = 0.7317a^2$




شكل ( ٧٦-٥ )

5.26 ) (أ) عين قيم دالة الالتواء $\phi$ في الحالة البلاستيكية المرنة الواردة في البند 5.8 على فرض $\theta = 1.25\theta_0$ وعدد الفترات الفرعية = 6

(ب) عين القيمة المناظرة الى $M/M_0$

5.27 ) عين قيمة $\phi_0$ للدالة $\phi$ عند مركز المربع الذي ضلعه $a$ اذا كانت $\phi$ تحقق المعادلة $\nabla^4\phi = 0$ داخل المربع بالشروط $\phi = 0, \frac{d\phi}{dn} = 1$ عند حدود المربع.

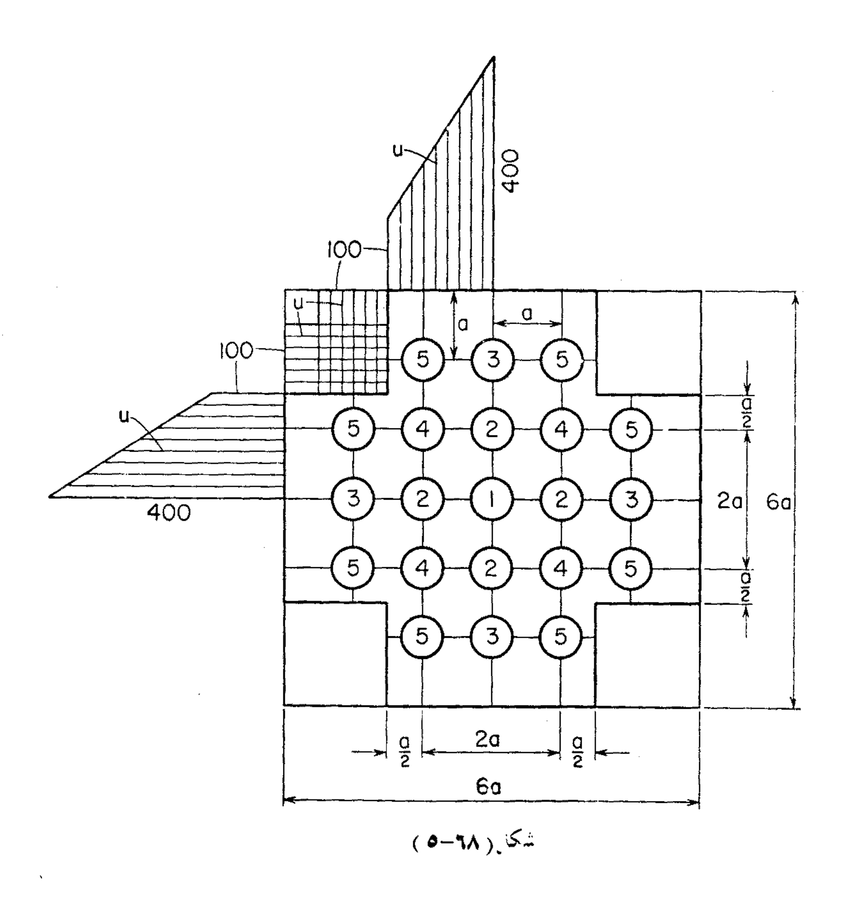
استعمل مؤثر الشكل $5.3c$ وان $n = 2$ وعدد الفترات الفرعية يساوي 4 .

ملاحظة : $n$ خارج العمود على المربع.

الجواب :

$$n = 2: \phi_0 = -0.1667a; n = 4: \phi_0 = -0.2191a.$$

**5.28** )جد ولثلاثة ارقام معنوية قيمة الجهد $V$ عند نقاط الارتكاز الشكل 5.68 عندما تكون القيم الحدودية كما هي مؤثرة في الشكل . استعمل مؤثر الفرق للشكل 5.29
تلميح : الجهد $V$ يحقق معادلة لابلاس

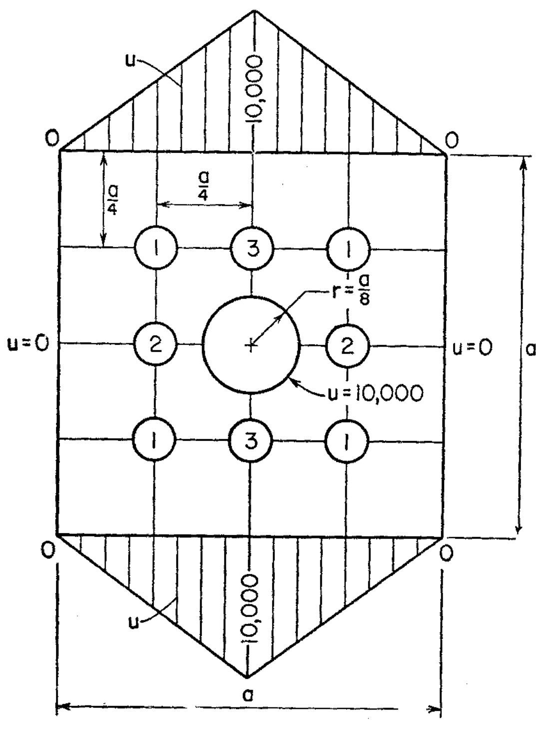



شكل ( ٦٨-٥ )

**5.29** ) جد قيمة درجة الحرارة في الحالة المستقرة وعند نقاط ارتكاز لوح الشكل 5.69 عندما تحفظ الحدود في درجات الحرارة المؤثرة . استعمل المؤثر $\nabla^2 u$ للشكل 5.29 عند جميع النقاط .

الجــــواب :

$$u_1 = 4833; u_2 = 6056; u_3 = 8278.$$




شكل ( ٦٩-٥ )

5.30 ) حدد اصغر تردد لذبذبة غشاء على شكل قطع ناقص نصفي محورية $2a/3, a$ بموجب شبكة مستطيلة حيث $h = a/3, k = a/2$
استعمل قواعد الفرق ذات الخطأ من المرتبة $h$ ( انظر البند 5.10 ).

5.31 ) عين اصغر تردد لذبذبة غشاء الذي شكل حدوده تشبه الشكل 5.28 مستعملا نقاط ( لارتكاز لهذا الشكل . ( انظر البند 5.10 ).
استعمل المؤثر $\nabla^2$ ذا الخطأ من المرتبة $h$ عند النقطة 4 واستعمل ايضا المؤثر $\nabla^2$ ذا الخطأ الذي قدره $h^2$ عند نقاط الارتكاز الاخرى.

الجواب :

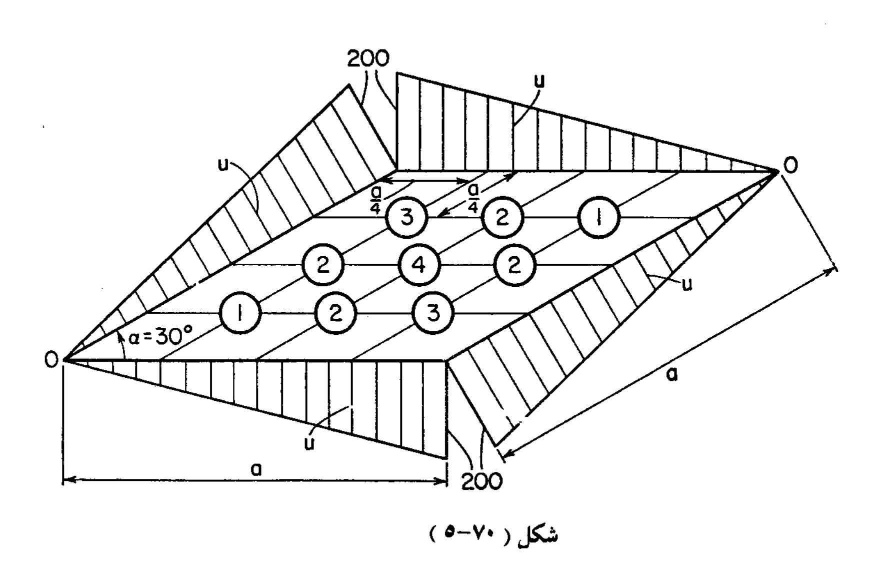
$$\omega = (4.490/L)\sqrt{S/m}.$$

5.32 ) لوح الشكل 5.28 مربع الشكل ضلعه $L$ وقد طوى ركنا منه باقواس دائرة نصف قطرها $L/2$ عين درجة الحرارة $u$ عند نقاط الارتكاز عندما تكون درجة الحرارة في الحدود كما في الشكل.
استعمل المؤثرات $\nabla^2 u$ التي الخطأ فيها من المرتبة $h^2$ عند جميع النقاط.

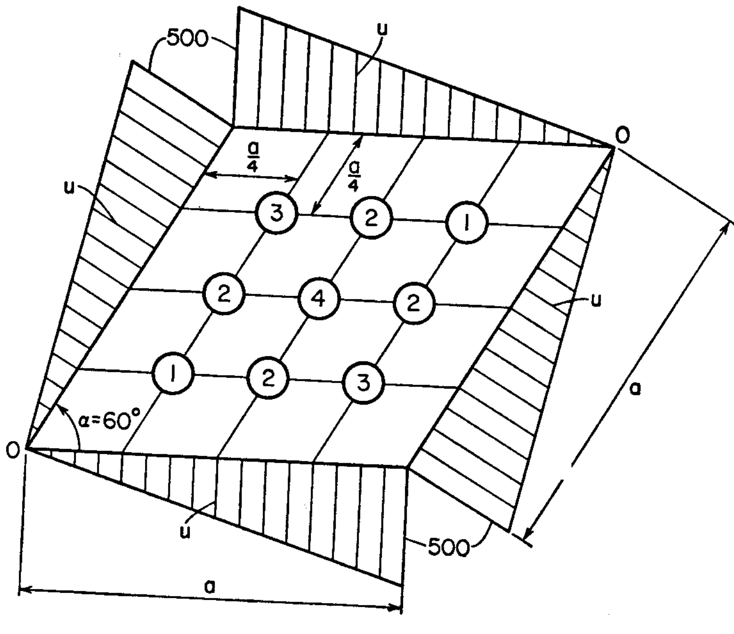
5.33 ) عين بطريقة الاسترخاء درجة الحرارة المستقرة عند نقاط الارتكاز للالواح المائلة المبينة في (a) من الشكل 5.70 والمبينة في (b) من الشكل 5.71 عندما تحتفظ اضلاعها في درجات الحرارة المؤثرة.

الجواب :

(a) $u_1 = 99.6;\quad u_2 = 139.0;\quad u_3 = 160.9;\quad u_4 = 152.2.$




شكل ( ٥-٧٠ )




شكل ( ٧١-٥ )

5.34 ) عين التغيرات الجانبية عند مركز غشاء يميل الزاوية $\alpha = 60°$ وله ضلعان متساويان الواحد = $a$ عندما تكون نسبة الضغط $P$ الى اللي $S = 16,000$ استعمل $n = 2$ وعدد الفترات الفرعية = 4 والاستيفاء ( انظر البند 5.6 ).

5.35 ) عين اصغر تردد لذبذبة غشاء مائل ذي ضلعين متساويين $a$ وميله $\alpha = 60°$ استعمل المحاور الاحداثية المائلة حين $n = 2$ مع ثلاث فترات فرعية والاستيفاء ( انظر البند 5.9 )

الجواب :

$$\omega_2 = (4.619/a)\sqrt{S/m}; \quad \omega_3 = (4.880/a)\sqrt{S/m};$$
$$\omega_{2,3} = (5.088/a)\sqrt{S/m}.$$

5.36 ) لوح مائل بزاوية 45° مستندا ببساطة واضلاعه $\sqrt{2}\,L, L$ . يتحدب تحت ضغط $N$ منتظم لكل وحدة طول حدودية ، جد اصغر قيمة حرجة الى $N$ مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاءات . ( انظر البند 5.20 والمسألة 5.55 )

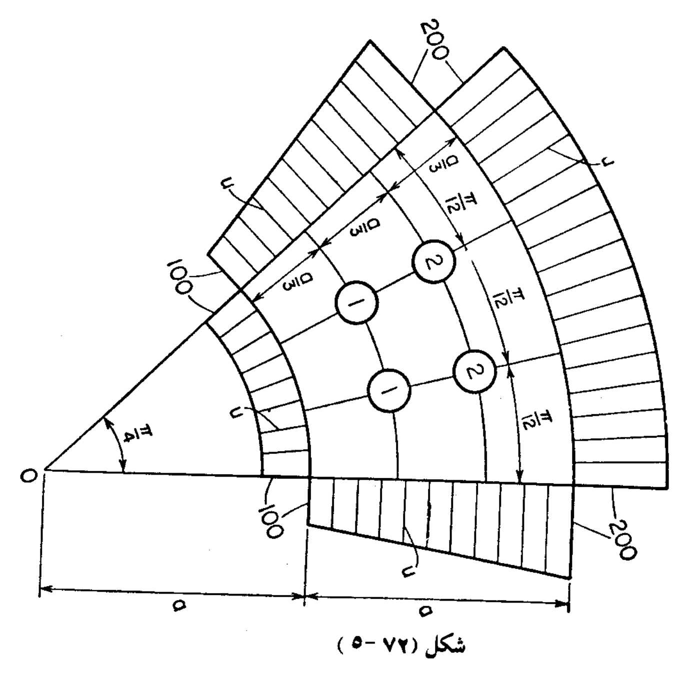
الجواب :

$$N_2 = 24D/L^2;\ N_3 = 26.63D/L^2;\ N_4 = 27.15D/L^2;$$
$$N_{2,3} = 28.730D/L^2;\ N_{3,4} = 27.820D/L^2;\ N_{2,3,4} = 27.510D/L^2.$$

5.37 ) عين قيم ارتكاز الجهد $\phi$ لقطاع دائري من الشكل 5.72 عندما تكون قيمه الحدودية هي كما هو مؤشر في الشكل . استعمل $n = 2$ ، من الفترات الفرعية تلميح : الجهد $\phi$ يحقق معادلة لابلاس $\nabla^2\phi = 0$

الجواب :

*Ans.* $n = 2: \phi = 155;\quad n = 3: \phi_1 = 138;\quad \phi_2 = 171.$




شكل (٧٢ -٥)

5.38 ) عين التغيرات عند نقاط ارتكاز غشاء حلقي نصف قطره الداخلي $a$ ونصف قطره الخارجي $3a$. الناجمة من ضغط منتظم قدره $p$ وشد منتظم S استعمل $n = 2$ ، 4 من الفترات الفرعية والاستيفاء في الخط المركزي للغشاء ( انظر البند 5.6 )

5.39 ) عين اصغر تردد لذبذبة الغشاء الواردة في المسألة 5.38 مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء ( انظر البند 5.9 ).

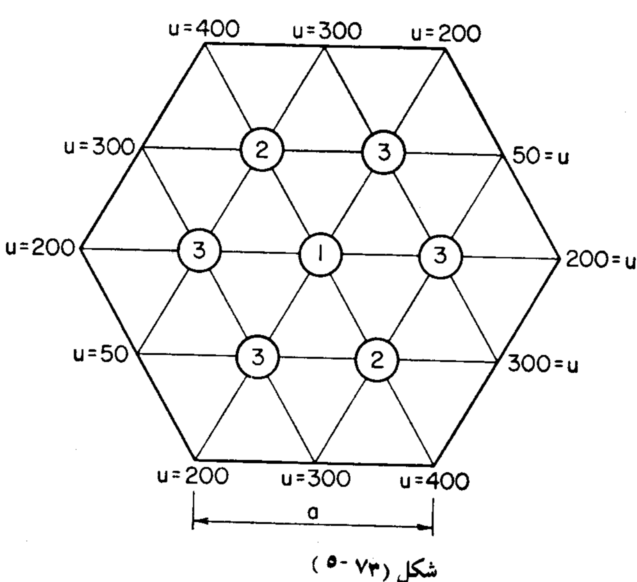
اجعل Let $w = \omega a\sqrt{m/S}$.

الجواب : $w_2 = 1.4142$; $w_3 = 1.4893$; $w_4 = 1.5153$; $w_{2,3} = 1.5495$; $w_{3,4} = 1.5487$.

5.40 الدالة $u(x,y)$ تحقق المعادلة $\nabla^2 u = 0$ في داخل مسدس طول ضلعه $a$ كما ان قيمها هي المؤشرة في الشكل 5.73 عند الحدود. عيّن بطريقة المعاودة iteration ولثلاثة ارقام معنوية قيم $u$ عند نقاط الارتكاز المؤشرة في الشكل.

الجواب

$u_1 = 233$; $u_2 = 276$; $u_3 = 212$.




شكل (٧٣-٥)

5.41 عين دالة جهد الالتواء المرن elastic torsional stress التي تحقق المعادلة $\nabla^2\phi + 2 = 0$ عند نقاط ارتكاز مقطع عرضي على شكل مثلث متساوي الاضلاع مستعملا $n = 4, 5, 6$ من الفترات الفرعية. علما بان قيمة $\phi$ = صفر عند الحدود. (انظر البند 5.7).

الجواب

$\omega_3 = (6/a)\sqrt{S/m}$; $\omega_4 = (6.532/a)\sqrt{S/m}$; $\omega_5 = (6.788/a)\sqrt{S/m}$;
$\omega_{3,4} = (7.216/a)\sqrt{S/m}$; $\omega_{4,5} = (7.243/a)\sqrt{S/m}$;
$\omega = (7.255/a)\sqrt{S/m}$.

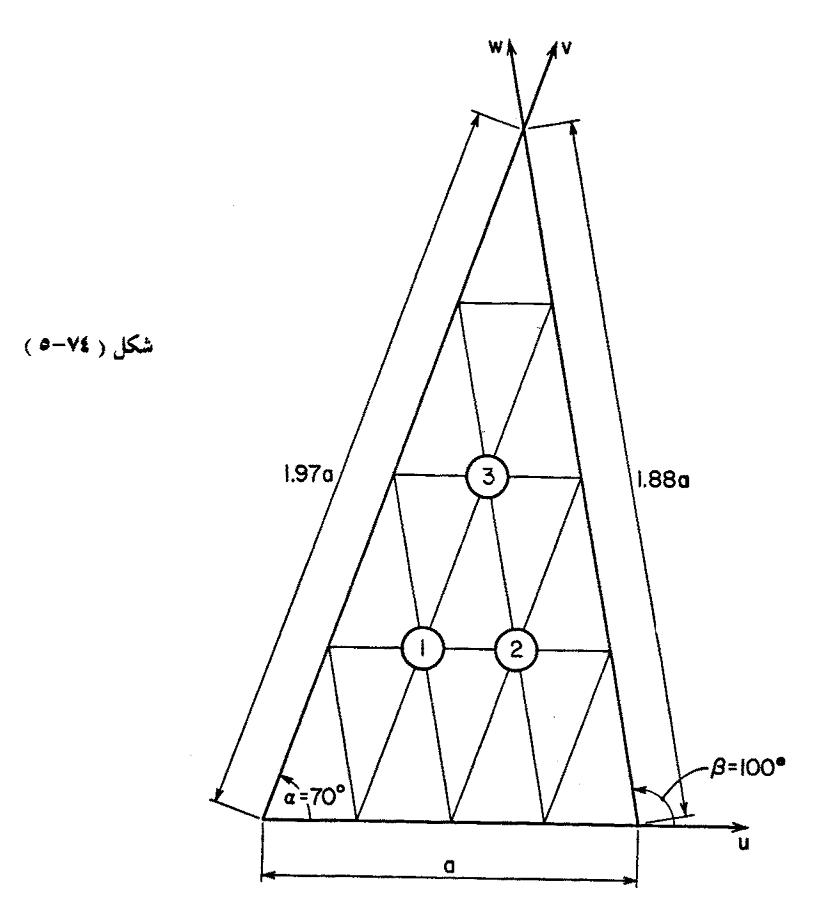
5.42 عين اصغر تردد لذبذبة غشاء على شكل مسدس منتظم طول ضلعه $a$. استعمل $n = 3, 4, 5$ من الفترات الفرعية والاستيفاء. (انظر البند 5.9)

عين اصغر تردد لذبذبه عتساء مسث الشكل كما في شكل 5.74 . استعمل $n = 3 , 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء .

تلميح : اشتق المؤثر $\nabla^2$ في المحاور الاحداثية حيث $\beta = 100°, \alpha = 70°$ واجعل التغيير :

$$z(u,v,w,t) = z(u,v,w) \sin \omega t$$

$$\omega_3 = (4.701/a) \sqrt{S/m}; \quad \omega_4 = (4.859/a) \sqrt{S/m};$$
$$\omega_{3,4} = (5.062/a) \sqrt{S/m}.$$




شكل ( ٧٤-٥ )

5.45 لوح على شكل مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه $a$ يستند استناداً بسيطاً ويؤثر عليه ثقل منتظم قدره $q$ .

عين التغرالجانبي عند نقاط ارتكازاللوح ، مستعملا $n = 3, 4, 5, 6$ من الفترات الفرعية واستوف extrapolate التغير المركزي $w_0$ (انظر المسألة 5.20 ) .

الجواب :

$n = 3; w_0 = 0.00077qa^4/D$. $n = 4; w_1 = 0.00055qa^4/D$. $n = 5$; $w_1 = 0.00036qa^4/D, w_2 = 0.00054qa^4/D$. $n = 6; w_1 = 0.000241qa^4/D$, $w_2 = 0.000434qa^4/D, w_0 = 0.000627qa^4/D$. $w_{3,6} = 0.000579qa^4/D$.

**5.46** لوح على شكل مثلث متساوي الاضلاع طوله $a$ يستند استنادا بسيطا وهو يتحدب نتيجة ضغط منتظم قدره $N$ لكل وحدة طول حدودية . عين اصغر قيمة تحدب $N$ مستعملا $n = 3, 4, 5$ من الفترات الفرعية والاستيفاء . ( انظر البند 5.20 والمسألة 5.55 ) .

**5.47** لوح مسدس الشكل طول ضلعه $a$ يستند استنادا بسيطا ويتحدب نتيجة ضغط منتظم قدره $N$ لكل وحدة طول حدودية . عين اصغر قيمة تحدب $N$ مستعملا $n = 1, 2, 3$ من الفترات الفرعية والاستيفاء ( انظر البند 5.20 والمسألة 5.55 ) .

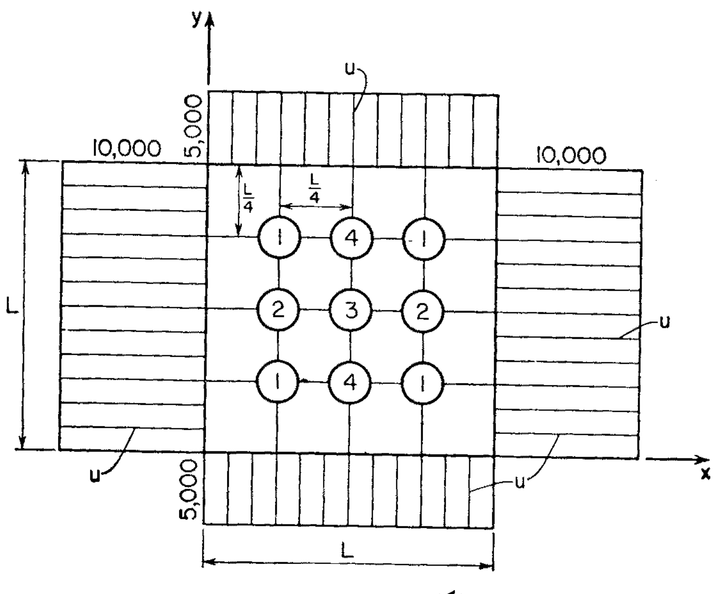
$N_1 = 4D/a^2$; $N_2 = 6.28D/a^2$; $N_3 = 6.77D/a^2$; $N_{1,2} = 7.04D/a^2$; $N_{2,3} = 7.16D/a^2$; $N_{2,3,4} = 7.18D/a^2$.

**5.48** حل المسألة 5.45 مستعملا مؤثر بواسان المحسن الوارد في البند 5.15 .

**5.49** (أ) عين درجة الحرارة $u(x,t)$ في قضيب ماطوله $L$ سطحه الجانبي معزولا علما بان نهايته قد حفظت في درجة حرارة صفر وان درجة حرارته الابتدائية هي $u(x,0) = 100x/L$ . استعمل حجم العين mesh size $h = L/4$ مستخدما $K = L^2/32$ على فرض $K = 1$

(ب) حل المسألة نفسها محافظاً النهاية $x = 0$ في درجة حرارة صفر ومعتبرا $u_x = 10/L$ في $x = L$

**5.50** اللوح المربع في الشكل 5.75, في البداية كانت درجة حرارته صفر وله ضلعان متقابلان حيث فجأة قد رفعت درجة حرارته الى درجة هي $10{,}000°$ والضلعان الآخران قد رفعت درجة حرارتهما الى $5{,}000°$ . عين درجة الحرارة بالنسبة الى الزمن بموجب طريقة ( بندر شمدت ) مستعملا حجم العين $h = L/4$ عندما $n = t/k$ التي تتغير من الصفر الى 10




شكل ( ٥-٧٥ )

الجواب

| $n = t/k$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3750 | 2500 | 0 | 1250 |
| 2 | 4687 | 4375 | 1875 | 3125 |
| 5 | 6562 | 6718 | 5625 | 5468 |

**5.51** حل المسألة 5.50 فارضا درجة الحرارة الابتدائية فوق اللوح باكمله تساوي 10,000 = 100, وان $\partial u/\partial n = 10$ فوق الحدود كلها .

**5.52** عين قيمة $\alpha$ التي تضمن وتجعل درجة الحرارة المستقرة في حالة تناقص في المسألة من البند 5.17 عندما تكون شروطها الحدودية كالاتي : ( اجعل $K = 1$ ) .

(a) $u(0,t) = 0; \quad u_x(L,t) = a.$
(b) $u(0,t) = 0; \quad u(L,t) + 2u_x(L,t) = 0.$

**5.53** (أ) عين ازاحات سلك $y(x,t)$ حيث $w = 90$ ( باوند / قدم ) . مسحوب بقوة $S = 10$ من الباوندات اذا كان :

$$y(x,0) = x(L - x)/L^2, \text{ for } x = 0(2)10, \; t = 0(1)5.$$

(ب) حل المسألة نفسها اذا كان السلك في البداية ساكنا وكانت ازاحته اليسرى $y(0,t) = t$ .

5.54 لوح مستطيل الشكل ضلعاه $a, 2a$ منتظم ومثقل قد ثني من جهة اضلاعة الصغرى ومسند اسنادا بسيطا من جهة اضلاعه الكبرى .عين التغير عند مركز اللوح مستعملا $h = a/2$ ( انظر البند 5.19 ) .

تلميح : الشروط الحدودية بالنسبة للحافات المستندة ببساطة هي $w = 0$

$\partial^2 w/\partial n^2 = 0$

5.55 لوح مربع الشكل طول ضلعه $a$ يستند ببساطة ويتحدب بتأثير ضغط قدره $N$ لكل وحدة طول حدودية .عيّن أصغر قيمة للتحدب $N$ مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية( انظر البند 5.20 ) .

تلميح : المسألة يعبر عنها بالمعادلات :

$$\nabla^4 w + \frac{N}{D} \nabla^2 w = 0; w = 0, \nabla^2 w = 0$$

عند الحدود اجعل $\nabla^2 w = z$ واستعمل مؤثر الشكل 5.3b

الجواب : $N_2 = 16D/a^2$; $N_3 = 18D/a^2$; $N_4 = 18.75D/a^2$; $N_{2,3} = 19.6D/a^2$; $N_{3,4} = 19.71D/a^2$; $N_{2,3,4} = 19.75D/a^2$; $N = 19.74D/a^2$.

انظر تيمونشيمكو . ونسكي كرايندر نظرية اللواح والقشريات ص 378

5.56 لوح مستطيل الشكل أحد ابعاده $2a$ (يستند ببساطة )يوازي $x$ والبعد الآخر $y$ يوازي $a$ يتحدب بتأثير ضاغط منتظم قدره $N$ لكل وحدة طول حدودية .عيّن أصغر قيمة لتحدب $N$ وبالمحاور المتعامدة ومستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء (انظر البند 5.20 والمسألة 5.55 ) .

5.57 لوح مستطيل بعداه $a, 2a$ (مثبت )يوازيان $y, x$ على التوالي يتحدب بتأثير ضغط منتظم هو $N$ لكل وحدة حدودية .عيّن أصغر قيمة تحدب الى $N$ مستعملا $n = 2, 3$ من الفترات الفرعية والاستيفاء ( انظر البند 5.20 ) .

الجواب : $N_2 = 16.8D/a^2$; $N_3 = 26.55D/a^2$; $N_{2,3} = 34.35D/a^2$.

5.58 لوح مربع الشكل يستند ببساطة ويتحدب بفعل ضغط منتظم قدره $N$ لكل وحدة طول مستخدمة الى الضلعين المتقابلين عين اصغر تحدب الى $N$ مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية ( انظر البند 5.20 ) .

الجواب :

$N_2 = 32D/a^2$; $N_3 = 36D/a^2$; $N_4 = 37.51D/a^2$; $N_{2,3} = 39.20D/a^2$;
$N_{3,4} = 39.46D/a^2$; $N_{2,3,4} = 39.54D/a^2$; $N = 39.48D/a^2$.

**5.59** حل المسألة 5.58 بطريقة فصل المتغيرات متخذا

$$w = Y(y) \sin (\pi/a)x$$

ومستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية .

**5.60** لوح مربع الشكل طول ضلعه $a$ مسنود ببساطة ويتذبذب بحرية . عين اصغر تردد له بموجب المؤثرات الفروق المحدودة حيث الخطأ فيها من المرتبة $h^2$ . ومستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء .

تلميح : المعادلة التفاضلية للوح المتذبذب هي :

$$D\nabla^4 w + m\partial^2 w/\partial t^2 = 0,$$

علما ان $m$ تدل على الكتلة لكل وحدة مساحة . عوض :

$$w(x,y,t) = z(x,y) \sin \omega t$$

**5.61** لوح مستطيل الشكل ابعاده $a$ ، $2a$ مسنود ويتذبذب بحرية . المطلوب تعيين اصغر تردد بموجب الفروق المحدودة مستعملا 2 , 3 من الفترات الفرعية والاستيفاء ( انظر المسألة 5.60 ) .

الجواب :

$\omega_2 = (12.962/a^2) \sqrt{D/m}$; $\omega_3 = (17.283/a^2) \sqrt{D/m}$;
$\omega_{2,3} = (20.740/a^2) \sqrt{D/m}$.

**5.62** لوح مستطيل الشكل مثبت من جانبه ذو طول $2a$ ( الموازي الى $x$ ) ومسند ببساطة اتجاه الضلع الاخر الذي طوله $a$ ( الموازي الى $y$ ) . اللوح يتذبذب بحرية . عين اصغر تردد بموجب فصل المتغيرات والفروق المحدودة عندما $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء .

تلميح : اجعل

$$w(x,y,t) = Y(y) \sin (\pi/2a)x \sin \omega t$$

في المعادلة للوح المسألة 5.60 اجعل :

الجواب

$$W = \omega a^2 \sqrt{m/D}.$$

$W_2 = 13.175$; $W_3 = 17.132$; $W_4 = 19.373$; $W_{2,3} = 20.298$;
$W_{3,4} = 22.254$; $W_{2,3,4} = 22.906$.

المحتويات

الفصل الثالث



الفصل الرابع

## الفصل الخامس

---

طبع بمطابع مديرية دار الكتب للطباعة والنشر

رقم الايداع في المكتبة الوطنية ( ٢٨٣ ) ببغداد لسنة ١٩٨٢